
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06907446 0

APUNTES

DE

MAGNETISMO TERRESTRE

POR

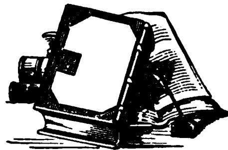
ADOLFO DIAZ,

ENCARGADO
DEL OBSERVATORIO METEOROLÓGICO

Y

FRANCISCO GARIBAY,

CONSERVADOR DE LOS GABINETES DE TOPOGRAFÍA Y ASTRONOMÍA DE LA ESCUELA NACIONAL DE INGENIEROS.



MÉXICO
OFICINA TIP. DE LA SECRETARÍA DE FOMENTO
Calle de San Andrés número 15.

1887



Estos apuntes no tienen nada enteramente original, y sí muy poco nuevo; han sido el resultado de estudios emprendidos para iniciarnos en los métodos prácticos para la observacion de los elementos magnéticos y para su cálculo.

Debido á la benevolencia del Sr. Ingeniero D. Manuel Fernández Leal, que ha tenido á bien disponer que se impriman en la Oficina tipográfica de Fomento, ven la luz pública; pero aparecen sin pretensiones.

El Sr. Búlnes, profesor del curso de meteorología, en la Escuela de Ingenieros, se ha servido darlos en su clase, lo que nos ha animado para publicarlos, pues el Sr. Búlnes y cada uno de los alumnos podrán, conociéndolos, manifestarnos todos los defectos que les encuentren, lo que mucho nos servirá.

Grande es nuestro agradecimiento á los Sres. Fernández Leal y Búlnes, y con gusto lo hacemos público.

México, Junio de 1887.

ADOLFO DIAZ. F. GARIBAY.

APUNTES DE MAGNETISMO TERRESTRE

Por Adolfo Diaz, encargado del Observatorio Meteorológico, y Francisco Garibay, conservador de los gabinetes de Topografía y Astronomía en la Escuela Nacional de Ingenieros.

CAPÍTULO I.

NOCIONES PRELIMINARES.

Se llaman "imanes" á las sustancias que tienen la propiedad de atraer al fierro, al nickel, cobalto, cromo y otros metales. La atraccion que los imanes ejercen sobre las sustancias citadas, no se limita á ellas; es general para todos los cuerpos de la naturaleza, solamente que la atraccion es casi siempre tan débil en la mayor parte de los casos, que no se puede fácilmente comprobar.

Los imanes son ó naturales ó artificiales: la magnetita[1] ó piedra iman es un ejemplo de los primeros; en cuanto á los artificiales, se hacen con barras ó agujas de acero, por procedimientos que describirémos despues. El poder atractivo de los imanes se ejerce al través de todos los cuerpos y á todas las distancias; varía con la temperatura, disminuyendo de una manera rápida, á medida que la temperatura se eleva: cuando ésta llega al "rojo," los imanes que la soportan pierden su poder. Las atracciones que los

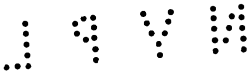
1 Mineral de fierro $Fe O. Fe^2 O^3$.

imanes ejercen sobre los cuerpos, están sujetas á la ley que parece ser general en todas las atracciones: "ser recíprocas y obrar en razon directa de las masas, é inversa del cuadrado de las distancias."

Se llama magnetismo á la causa que desarrolla en los imanes el poder de atraccion. El magnetismo fué considerado por mucho tiempo como un agente físico especial; la teoría de Ampère pone en evidencia todos los puntos de contacto que el magnetismo tiene con la electricidad, y por lo mismo, la "casi certeza" con que se puede afirmar que los fenómenos eléctricos y magnéticos son distintas manifestaciones de una misma causa. La física moderna va más allá, pues segun todas las últimas inducciones hechas en esta ciencia, parece comprobada "la correlacion y unidad de las fuerzas físicas."

El poder de atraccion que tienen los imanes sobre las sustancias magnéticas, no es el mismo en cualquier punto del iman; la experiencia demuestra que en todo iman hay una línea desprovista del poder de atraccion, línea que se llama "neutra," y dos puntos en que la atraccion es máxima y que se llaman "polos." En los imanes naturales no es tan regular esta distribucion del magnetismo. En los artificiales se producen algunas veces varios polos: cuando un iman presenta varios polos, éstos reciben el nombre de "puntos consecuentes" ó "polos secundarios." Supondrémos siempre que los imanes no tienen más que dos polos, porque empleando los procedimientos de imantacion, que más adelante describirémos, se evita la formacion de los puntos consecuentes. Estos dos polos se denominan siempre con las letras A y B, ó con los nombres de "austral" y "boreal."

La accion de los dos polos de un iman sobre las sustancias magnéticas, es idéntica, como se puede demostrar, acercando cada uno de los polos del iman á la limadura de fierro; ésta se adhiere igualmente en ambos polos. Pero si en vez de emplear una sustancia magnética, como lo es la limadura, y un iman, usamos dos imanes, notarémos que, presentando los dos polos del primero á uno de los polos del segundo, se produce con uno de ellos atraccion y con otro repulsion. Si en seguida presentamos siempre los dos polos del primer iman al otro polo del segundo, observarémos que el polo del primer iman, que en el caso anterior habia sido atrai-



do, ahora es repelido, y que el que habia sido repelido, ahora es atraido. Esta experiencia demuestra que no hay identidad en la manera de obrar de los polos de dos imanes en presencia, y se deduce "que los dos polos de un iman producen efectos contrarios sobre el polo de otro." Para llegar á precisar mejor este hecho de experiencia, tomemos tres imanes: señalemos los polos del primer iman con las letras A y B; designemos los del segundo con las letras x y z, y los del tercero con y y u; acerquemos indistintamente á un polo del primer iman (al polo A por ejemplo) los de los otros dos imanes; de estos cuatro polos, dos seran atraidos por A, y supongamos, para fijar las ideas, que sean x é y; z y u serán repelidos. Si usamos el polo B del primer iman, x é y serán repelidos, y z y u atraidos. Pues bien; si ahora presentamos el polo x al polo y, ó el polo z al polo u, habrá repulsion; y si presentamos x á u, z á y, habrá atraccion. Los polos iguales se señalan siempre con una misma letra y se designan con el "mismo nombre." Por lo anteriormente expuesto, queda demostrada la siguiente ley:

"Los polos del mismo nombre se repelen, los de nombre contrario se atraen."

Cuando un iman se corta en uno ó varios fragmentos, se reconoce que estos fragmentos son otros tantos imanes dotados de dos polos y de una línea neutra. No se puede conseguir que un iman tenga un sólo polo, y este hecho se enuncia diciendo: "que los polos son inseparables." Los imanes formados por la ruptura del iman primitivo presentan otra particularidad, y es que los polos de los imanes derivados tienen la misma intensidad que los del primitivo. Se puede comprobar este hecho de la manera siguiente: se hace soportar al iman un peso de fierro; en seguida se rompe: cada uno de los imanes formados soporta el mismo peso. Los polos de un iman cualquiera son de igual intensidad, como se puede demostrar de la manera siguiente: tomemos una aguja fina imantada, que repose por su centro en un pivote y que gire libremente al derredor de ese centro. Pongamos un poco abajo de la aguja un arco graduado: si se lee la indicacion que una de las extremidades de la aguja señala en el arco graduado, y en seguida se presenta á la aguja un iman, ésta se desviará un arco determinado, igual á la diferencia de lecturas señaladas sobre el arco por una misma extremidad de la aguja. Si á ésta se presenta en

seguida el otro polo del iman, se desviará en sentido contrario un arco igual. Así ès que: Primero. "Los dos polos de un iman tienen igual intensidad." Segundo. "Si un iman se rompe en un número cualquiera de pequeños fragmentos, cada fragmento posee dos polos opuestos, cuya intensidad es igual á la de los polos del iman primitivo."

Dijimos ya que los imanes obran sobre todos los cuerpos (propiedad demostrada por las experiencias de Coulomb, Levaillaif y Becquerel), unas veces atrayéndolos, otras repeliéndolos. A las sustancias que son atraidas se les llama "magnéticas" (el nickel, cobalto, cromo, compuestos ferruginosos; etc.); á las que sufren repulsion, "diamagnéticas" (bismuto, plomo, azufre, cera, agua, etc.)

Los imanes, obrando sobre las sustancias magnéticas, presentan varios fenómenos (espectros y fantasmas magnéticos, etc.), que son distintos casos de la "imantacion por influencia," y que ampliamente se encuentran desarrollados en los cursos de física; consistentes, segun se recordará, en que los imanes, en presencia de las sustancias magnéticas, trasforman á estas últimas en verdaderos imanes, puesto que las dotan de dos polos y una línea neutra. Esta influencia puede ejercerse en el caso en que las sustancias magnéticas estén en contacto con los imanes, ó en el de que estén separadas, no dependiendo sino del mayor ó menor poder del iman empleado. La imantacion que adquieren así las sustancias magnéticas no es permanente, y, por regla general, dura tanto como dura la influencia.[1] Otros cuerpos se imantan más difícilmente por influencia; pero es digno de notarse que entónces presentan mayor resistencia para perder el poder magnético. Esta resistencia es la que Coulomb denominó "fuerza coercitiva," y la que Jamin asimiló al frotamiento.

MÉTODOS PARA LA IMANTACION.

Los manantiales de la imantacion son: Primero. Los imanes poderosos. Segundo. El magnetismo terrestre. Tercero. La electricidad, siendo este último el agente más intenso. El poder mag-

1 Algunas sustancias, como el acero, no pueden imantarse fácilmente por influencia; pero una vez imantadas, no pierden su poder magnético.

nético que puede adquirir una barra que se trata de imantar, tiene un límite, cualquiera que sea el procedimiento seguido. Cuando se llega á esté límite, se dice que la barra está imantada á "saturacion."

La imantacion por los imanes puede conseguirse por tres procedimientos: Primero. Por simple contacto. Segundo. Por contacto separado. Tercero. Por doble contacto. Vamos á describir sucintamente cada uno de ellos.

MÉTODO DEL SIMPLE CONTACTO.

Se coloca sobre una mesa la barra que se trata de imantar, y se desliza sobre la barra la extremidad de un fuerte imán, varias veces, y siempre en el mismo sentido, y de esta manera quedará la barra imantada. Supongamos que el polo correspondiente á la extremidad del iman que se ha apoyado en la barra, sea el polo designado *A* (polo Norte), y que las fricciones se hayan hecho en el sentido que indica la figura 1ª; entónces en el punto *A'* de la barra se habrá formado el polo Norte del nuevo iman, puesto que la última extremidad de la barra que toca el iman móvil presenta un polo de nombre contrario al que sirve para las fricciones. Si invertimos de polo, es decir, si hacemos las fricciones con la extremidad *B*, cambiarán los polos que van á formarse en la barra. El mismo efecto se produciria si las fricciones fueran siempre hechas con *A*, pero en sentido contrario al que indica la figura 1ª Luego si invirtiéramos el polo del iman móvil y el sentido de las fricciones, no habrá cambio en último resultado.

Este procedimiento de imantacion no puede emplearse más que para barras pequeñas, pues produce siempre una débil imantacion, y algunas veces "puntos consecuentes."

MÉTODO POR DOBLE CONTACTO SEPARADO.

En este procedimiento se colocan dos imanes de igual fuerza y con los polos opuestos, en medio de la barra que se trata de imantar, y en seguida se les hace deslizar simultáneamente hácia las

extremidades de la barra, repitiendo esta operacion varias veces. La figura 2 da una idea de este procedimiento.

MÉTODO POR DOBLE CONTACTO.

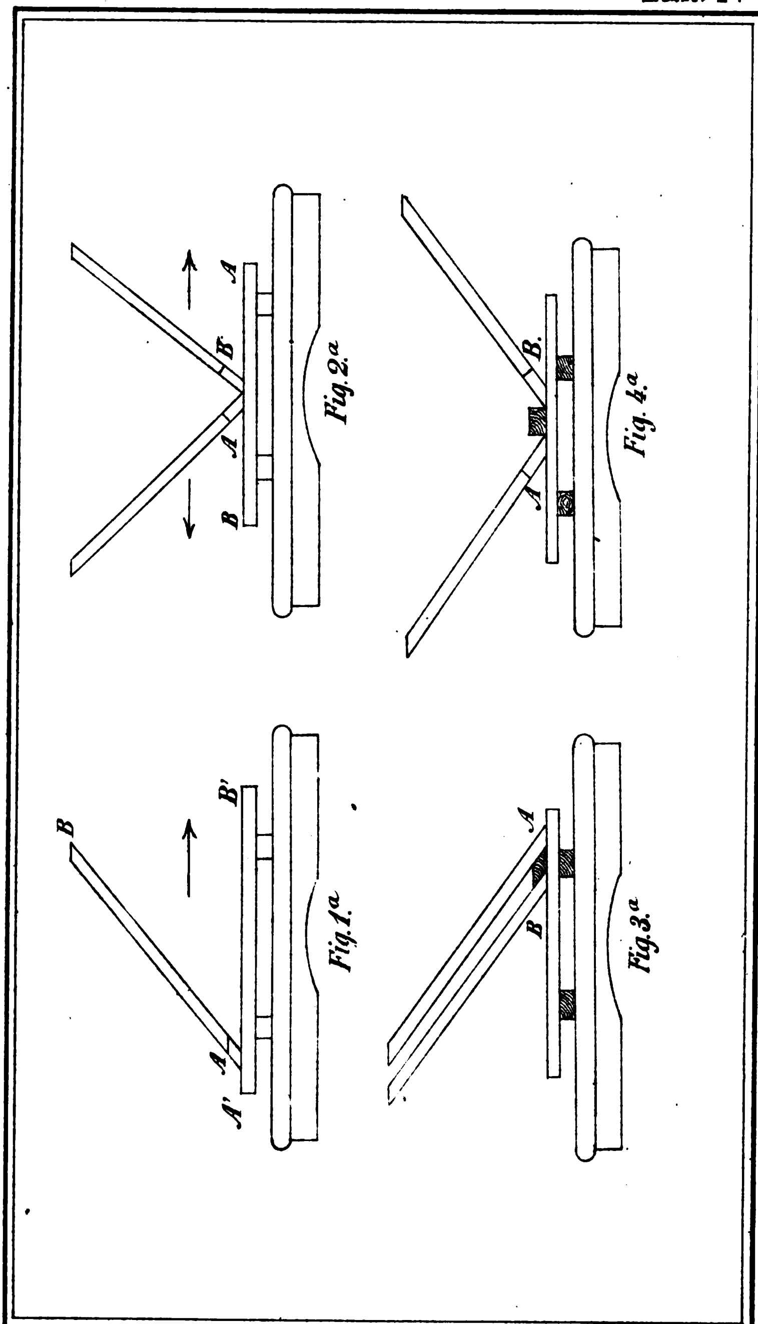
Siguiendo este método, los dos imanes que sirven para imantar á la barra, se colocan como en el anterior, con los polos opuestos en frente. Es conveniente inclinar los imanes un ángulo de 15° á 20° y poner entre ellos una pieza de madera. En seguida se hacen deslizar juntos, partiendo del centro á cada una de las extremidades. Las figuras 3 y 4 representan las dos maneras de proceder á la imantacion por este método, que, aunque tiene la ventaja de producir una fuerte imantacion, casi siempre desarrolla "puntos consecuentes."

CORRIENTES ELÉCTRICAS.

Para imantar una barra por medio de la electricidad, se coloca dentro de un tubo de vidrio, y en seguida se enrolla de izquierda á derecha, por arriba ó por abajo, con alambre de cobre (en el primer caso se dice que el alambre es "dextrorsum;" en el segundo, "sinistrorsum"), haciendo pasar una corriente eléctrica, comunicando los polos de uno ó dos elementos, la barra queda imantada. Si se ha empleado una corriente enérgica, es casi instantánea la imantacion.

La barra imantada por este procedimiento tiene su polo *A* ó boreal en la extremidad por la que ha entrado la corriente, si es dextrorsum; y si el alambre ha sido envuelto sinistrorsum, el polo *B* ó austral es el que queda en esa extremidad. El empleo de las corrientes eléctricas para la imantacion es el procedimiento que debe preferirse, no sólo por su violencia y sencillez, sino tambien porque produce la imantacion á saturacion y permanente. Al principiar, la imantacion es muy intensa; pero despues desciende al punto de saturacion estable. Puede suprimirse el tubo de vidrio, usando alambre de cobre aislado.

Lam. 1ª



LIT. DEL TIMBRE.



IMANTACION POR LA ACCION DE LA TIERRA.

Veremos despues que la tierra puede asimilarse á un poderoso iman, y por lo mismo, se puede producir una imantacion por influencia en las barras y en algunas sustáncias magnéticas, colocándolas en la direccion del meridiano. La imantacion que así se produce es débil é inestable.

CAUSAS QUE MODIFICAN EL PODER DE IMANTACION.

Haz magnético.—Se llama así á un conjunto de barras imantadas colocadas paralelamente y con los polos del mismo nombre enfrente. Se les da á estos haces diversas formas: algunas veces se adopta la de herradura, que es la que conviene si el haz va á soportar un peso; otras veces se les da la forma rectilínea de barras. A primera vista pareceria que la fuerza de un haz magnético debia ser igual á la suma del poder magnético de cada uno de los imanes que lo componen; pero las experiencias de Coulomb han demostrado que la fuerza del haz es un poco menor, lo que debe atribuirse á las repulsiones que tienen lugar entre los imanes. Para evitar estas repulsiones, es bueno sobreponer las barras de manera que los que van encima vayan siendo más cortos (cosa de un centímetro); de esta manera la barra central del haz es la más larga y las dos que quedan encima las más cortas.

ARMADURAS DE LOS IMANES.

Son unas piezas de fierro dulce, que se ponen en contacto con los polos de los imanes, para conservar y aumentar la imantacion por influencia.

IMANES JAMIN.

Jamin ha demostrado que la fuerza de un iman aumenta con el espesor de las barras, pero no proporcionalmente á él, y ha sus-

tituido las láminas de acero grueso que se empleaban ántes para los haces, con láminas muy delgadas, pero imantadas á saturacion. Los haces magnéticos formados así, adquieren mayor capacidad de saturacion, sobre todo si se usan armaduras. Jamin ha llegado á conclusiones muy interesantes sobre la imantacion; conclusiones que pueden consultarse en algun moderno tratado de Física.

Por último: citarémos entre las modificaciones que puede sufrir un iman, el caso de la inversion de sus polos, que puede tener lugar si se sujeta el iman á una corriente eléctrica que pase en un sentido conveniente.

MAGNETISMO TERRESTRE.

Siempre que se suspende una aguja imantada á un hilo, ó en un pivote sobre el que pueda girar libremente, se observa que despues de un cierto número de oscilaciones, la aguja se detiene sensiblemente en la direccion de la línea Norte–Sur; es decir, segun la meridiana del lugar en el que se verifica la experiencia. De aquí se deduce que en la aguja ejerce la tierra una accion directriz. Se explica esta accion asimilando la tierra á un iman cuyos polos coincidan con los polos geográficos; y en virtud de la ley citada de las atracciones y repulsiones, el polo de la aguja que se dirija al Norte geográfico será su polo austral, y el que se dirija al Sur geográfico será el boreal. Así es que á los polos de una aguja en las condiciones arriba expresadas, se les da nombres aparentemente contradictorios; pues se llama polo norte de la aguja el austral, que es el que se dirige al Norte geográfico.

Esta accion que la tierra ejerce sobre una aguja imantada, se denomina "fuerza magnética terrestre," y su estudio comprende tres elementos: la declinacion, la inclinacion y la intensidad. Los dos primeros se refieren á la direccion de la fuerza, y el tercero á su grado de accion. Para definir estos elementos, volvamos á nuestra aguja libremente suspendida. "El ángulo formado por el eje magnético de la aguja, con la meridiana que pasa por el centro de ella, es lo que se llama declinacion; ó lo que es lo mismo, el azimut astronómico de la aguja." La declinacion es oriental ú

occidental, segun que la aguja esté al Oriente ó al Occidente del meridiano astronómico. El plano vertical que pasa por el eje magnético de una aguja, se llama plano meridiano magnético, y su trazo sobre el horizonte se designa meridiana magnética.

Si suponemos ahora una aguja colocada en el plano meridiano magnético, girando al derredor de un eje horizontal, notarémos que esta aguja forma con el horizonte un ángulo, que recibe el nombre de "inclinacion." La inclinacion es boreal ó austral; para todos los puntos de la tierra situados en el hemisferio Norte es austral, y para los del hemisferio Sur es boreal.

En cuanto á la "intensidad de la fuerza magnética," es la mayor ó menor energía con la que la tierra solicita á la aguja; es una fuerza variable que se valúa por comparacion con otras fuerzas conocidas.

DISTRIBUCION GEOGRÁFICA DEL MAGNETISMO.

Podemos hacer una representacion gráfica de los elementos que forman la fuerza magnética terrestre, si sobre un globo ó un mapa-mundi unimos por una línea continua todos los puntos en que cada uno de los tres elementos citados tiene igual valor. Así obtendrémos tres sistemas de curvas: las que unen puntos de igual declinacion, que se llaman "líneas isogónicas;" las que unen puntos de igual inclinacion, que se llaman "isoclínicas," y las que ligan los puntos de igual intensidad, llamadas "isodinámicas." El estudio y discusion de estas curvas dará á conocer las diferentes leyes á que está sujeto el magnetismo terrestre. Someramente hablarémos de las más notables de estas curvas.

Como la declinacion es oriental para muchos puntos de la tierra, y occidental para otros; y como su valor absoluto varía en distintas localidades, se inferirá, analíticamente, que el valor de la funcion que exprese aquel elemento, debe pasar por cero; ó lo que es lo mismo, que en algunos puntos de la tierra la meridiana astronómica debe confundirse con la magnética. Si unimos los puntos en que tenga lugar esta condicion, tendrémos una primera línea caracterizada, porque es la línea de separacion de los puntos que tienen una declinacion oriental, de los que la tienen

occidental, y porque liga puntos en que la declinacion es nula. A esta línea se le llama "línea sin declinacion." La forma que en lo general afecta, se aparta de la de un círculo máximo, y presenta muchas irregularidades. En el continente americano esta línea parte de la tierra de Boothia; se dirige despues á la bahía de Hudson; pasa cerca de Philadelphia, y corta la extremidad oriental del Brasil en el Cabo de San Roque, para ir á terminar en el hemisferio Sur, en el Sud-Victoria.

En Boothia y en Sud-Victoria la aguja se pone loca; estos dos puntos son los polos magnéticos de la tierra.

Las observaciones hechas ponen de manifiesto que la línea sin declinacion ha experimentado un movimiento lento hácia el Oeste, y que continúa en la actualidad esa traslacion. De aquí resulta que la declinacion va disminuyendo en los lugares en que es oriental, y aumentando para los que tienen declinacion occidental.[1]

En cuanto á las otras líneas isogónicas, dirémos: que en lo general difieren mucho de la forma de círculos máximos. Todos los meridianos magnéticos van á converger á los polos citados. Las líneas isoclínicas tienen formas irregulares, que se alejan bastante de las de los paralelos geográficos. La inclinacion es boreal para el hemisferio Sur, y austral para el hemisferio Norte; es, pues, una cantidad que varía y cambia de signo; así es que, como en las isogónicas, encontrarémos una isoclínica que ligue todos los puntos en que la inclinacion sea nula; en todos ellos la aguja se confundirá con el plano del horizonte. Esta línea se llama "ecuador magnético."[2] Los puntos en que se cortan el ecuador geográfico y el magnético (que se llaman nodos), sufren dislocaciones; la posicion de estos puntos ha variado y continúa variando. En la actualidad se encuentran, uno en el Océano Atlántico y otro en el Pacífico; siendo la direccion de su movimiento de traslacion, de Oriente á Occidente. La intensidad de las variaciones que sufre la línea sin inclinacion es menor que la que experimenta la línea sin declinacion.

Las líneas isodinámicas difieren en general de las isoclínicas; pero una de las más notables entre ellas, la de menor intensidad,

1 En México tenemos el ejemplo dé esta variacion.
2 Forma con el ecuador geográfico un ángulo de 12° 30′.

se confunde casi con el ecuadro magnético. En el globo terrestre hay cuatro puntos en que la intensidad magnética es casi máxima. De estos puntos, el más fuerte es el foco americano, y el más débil el de Siberia.

Los tres elementos enumerados sufren variaciones seculares, diurnas, regulares é irregulares, designándose estas últimas con el nombre de "perturbaciones."

Citarémos desde luego algunas de las leyes generales á que están sujetos y que conviene recordar.

"La declinacion oriental en el hemisferio Norte, es mayor en invierno que en verano, sucediendo lo contrario con la occidental."

"La amplitud de la oscilacion diurna, es una funcion de la latitud magnética."

"En los puntos en que la declinacion es oriental, tiene su máximo á las 8 h. a. m.; los que tienen declinacion occidental, lo alcanzan á las 2 h. p. m."

"La inclinacion decrece con la latitud magnética." [1]

"La intensidad magnética aumenta con la distancia al ecuador magnético, y parece ser una vez y media mayor en los polos, que en el ecuador."

La intensidad decrece con la altura, probablemente segun la relacion inversa del cuadrado de las distancias. Varía en el dia, teniendo un mínimum entre 4 h. p. m. y 5 h. p. m. La intensidad presenta variaciones irregulares como la declinacion y la inclinacion.

Las líneas isodinámicas presentan una grande analogía con las isothermas.

ELEMENTOS MAGNÉTICOS DE LA REPÚBLICA.

El territorio de la República está comprendido probablemente entre las isoclínicas de 35° y 60° y las isogónicas de 7° y 12°. En cuanto á las variaciones seculares de estos elementos no se han

1 Como lo comprueban las curvas construidas por Duperrey y la fórmula que aproximadamente liga la inclinacion con la latitud magnética es: tang. $i = 2$ tang. λ.

podido determinar, en razon de que las pocas observaciones antiguas que se han podido reunir fueron practicadas con instrumentos y en circunstancias diferentes, y separadas además con grandes intervalos de tiempo.

MÉTODOS EMPLEADOS EN EL ESTUDIO DE LA DISTRIBUCION GEOGRÁFICA DEL MAGNETISMO.

Siguiendo las ideas de Gilbert y de Euler, se ha buscado á priori, cuál deberia ser la distribucion geográfica del magnetismo terrestre; siempre en la hipótesis de que en la tierra habia un iman dirigido segun el eje del globo. Comparando los resultados de la investigacion á priori, con los obtenidos por la discusion de las observaciones practicadas, se han encontrado bastantes analogías entre lo que indicaban la teoría y la observacion, sin llegar á obtener, sin embargo, una confirmacion completa de aquélla. Gauss para estudiar la distribucion del magnetismo terrestre, ha seguido el camino opuesto. Comenzó por buscar las fórmulas empíricas que mejor representaban los resultados de la observacion, estableciendo en seguida á posteriori las leyes de aquella distribucion.

CAPÍTULO II.

MAGNETISMO TERRESTRE.

Naturaleza de la fuerza magnética.—Dijimos ya, que si se suspende una aguja imantada á un hilo, ó se pone en un pivote al derredor del cual pueda girar libremente, se observa que la aguja despues de algunas oscilaciones, se fija siempre en una direccion próxima á la línea N. S. (Norte Sur.) De esta experiencia se deduce que la tierra ejerce sobre los imanes una accion á distancia, que vamos á estudiar.

Sabemos que cuando un cuerpo sólido está sometido á un sistema de fuerzas, cualquiera, éste puede reducirse á otro más sen-

cillo: á un par y á una fuerza única:[1] el par tiende á hacer girar el cuerpo, miéntras que la fuerza tiende á imprimirle un movimiento de traslacion.

Vamos á tratar de reducir el sistema de fuerzas magnéticas que provienen de la accion terrestre sobre una aguja imantada, á un par y á una fuerza. A este fin comenzemos por citar dos sencillísimas experiencias: 1ª Se demuestra por medio de pesadas muy precisas que una barra de acero no pesa más despues de imantada, que ántes, de donde se concluye "que la fuerza magnética terrestre no tiene componente vertical." 2ª Si en una vasija llena de agua y sobre un disco de corcho se pone una barra imantada, el corcho oscila primero y se fija despues en una posicion en que la línea de los polos del iman es casi paralela á la direccion N. S.; pero el corcho y la barra no avanzan al Norte ni al Sur: luego: "la fuerza magnética terrestre no tiene componente horizontal."

Puesto que la fuerza magnética terrestre no tiene componentes vertical ni horizontal, debe deducirse que es nula, y el sistema de fuerzas magnéticas se reduce á un par[2] que se llama "par terrestre."

La existencia del par terrestre es un hecho de experiencia, perfectamente comprobado. Teóricamente podiamos haber llegado á la misma conclusion, asimilando la tierra á un iman y fundándonos en la ley conocida de las atracciones y repulsiones que tienen lugar entre los polos de los imanes. Los dos polos de una barra imantada, cuya longitud podia despreciarse en presencia

1 En efecto, supongamos que un cuerpo está en equilibrio (Figura 5) bajo la accion de n fuerzas F, F′, F″ aplicadas en los puntos A, B, C, D...... y cuyas direcciones é intensidades están representadas por A F, B F′, C F″...... Tomémos uno de los n puntos de aplicacion, A (p e) é introduzcamos dos fuerzas iguales y contrarias que tengan una direccion paralela á la de la fuerza B F′ y su misma intensidad; estas dos fuerzas serán A F, y A F″, y el sistema primitivo en nada se habrá alterado. Por el mismo punto A llevemos otras dos fuerzas iguales y contrarias paralelamente á C F‴ y de una intensidad igual á la de esta fuerza; tendrémos así A F_2 y A F'_2 y continuando de esta manera, llegarémos á obtener: 1º Un sistema de n fuerzas que como son concurrentes tienen una sola resultante; y 2º (n—1) pares cuyos planos se corten en el punto A, por lo cual pueden reducirse á un sólo par resultante, cuyo plano pase tambien por el punto A.

L. Q. S. D.

2 Se llama par á un sistema de dos fuerzas iguales y contrarias, cuyos puntos de aplicacion están en los extremos de una recta. Un par queda determinado por su direccion y por su momento. El momento de un par es el producto de una de sus fuerzas por su brazo de palanca.

de la distancia de los polos magnéticos terrestres, quedaban, en esa hipótesis, solicitados por fuerzas iguales y contrarias.

El par terestre estará completamente determinado cuando se conozca: 1º Su direccion en un lugar de la tierra. 2º Su momento, con relacion á un iman dado.

Para conocer la direccion del par terrestre en un lugar de la tierra, se suspenderá una aguja imantada por su centro de gravedad, de manera que pueda moverse libremente en el espacio, y al cabo de algunas oscilaciones se pondrá en equilibrio en la direccion de dicho par. La suspension citada es ideal, pues no se puede lograr que la aguja se "mueva libremente;" así es que acercándose cuanto sea posible á esta suspension, se conocerá con más exactitud la direccion del par terrestre. Vamos á descomponer una de sus fuerzas de manera que obtengamos elementos cuya determinacion sea más fácilmente realizable.

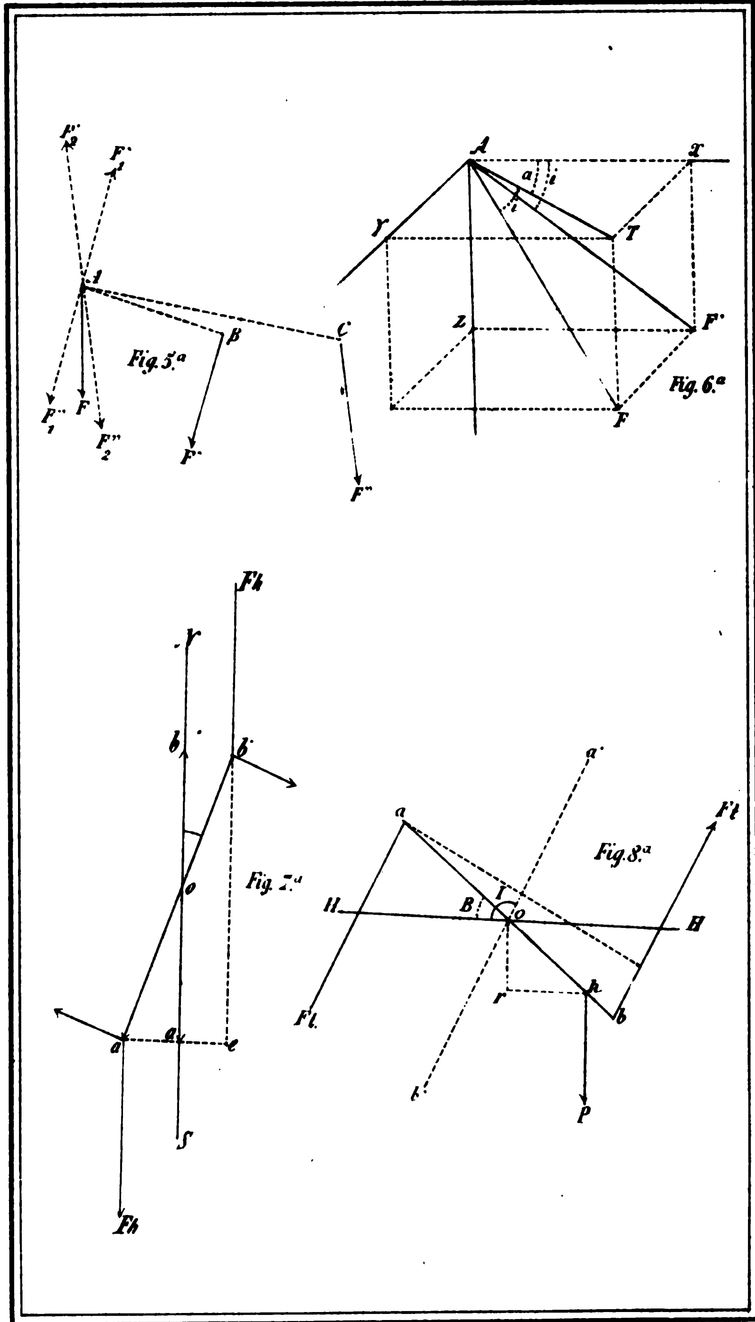
DESCOMPOSICION DE LA FUERZA DEL PAR TERRESTRE.

Supongamos una aguja imantada, con la suspension ideal que citamos ántes; la aguja en estas condiciones se pondrá exactamente en la direccion del par; direccion que en la figura 6 está representada por A F, siendo A uno de los polos de la aguja. Llevemos por A como orígen, tres ejes coordenados rectangulares, x, y, z, con la condicion de que dos de ellos (x é y) sean horizontales y descompongamos la fuerza A F segun sus componentes en los tres ejes.[1] Estas componentes serán: designando por i el ángulo que A F forma con el plano horizontal.

$$x = \text{A F} \cos i \cos a = F_h \cos a \text{ llamando A F} \cos i = F_h$$
$$y = \text{A F} \cos i \operatorname{sen} a = F_h \operatorname{sen} a$$
$$z = \text{A F} \operatorname{sen} i \qquad = F_v$$

El producto A F cos i nos representa la proyeccion horizontal de la fuerza del par magnético terrestre, en el plano del me-

1 La mecánica demuestra que toda fuerza puede descomponerse de una infinidad de maneras, segun tres direcciones que formen un ángulo triedro cualquiera.



LIT. DEL TIMBRE.

ridiano magnético, y se le denomina especialmente con el nombre de componente horizontal. El producto A F sen i, representará la componente vertical de la misma fuerza en el plano del meridiano magnético.

El plano z A F es el plano meridiano magnético; el ángulo F A F es la inclinacion; y el ángulo x A F seria la declinacion en el caso en que el plano x A F′ coincidiera con el meridiano astronómico.

Así habrémos descompuesto la fuerza A F. 1º en dos componentes, en el plano meridiano T_h y T_v y á la componente F_h (componente horizontal) en otras dos, x é y de lo que se deduce:

1ª Si la aguja se mueve únicamente en un plano horizontal (aguja de declinacion), cada uno de sus polos estará sometido á una fuerza igual á F_h y se pondrá en equilibrio cuando se encuentre en la direccion del par (F_h — F_h,) es decir, que su eje coincida con la meridiana magnética.

2ª Si la aguja es móvil únicamente en un plano vertical (aguja de inclinacion) su ángulo con la horizontal medirá la inclinacion, siempre que el plano vertical en que se mueve, coincida con el del meridiano magnético. Si este plano vertical tiene un azimut cualquiera distinto del azimut del meridiano magnético, cada polo de la aguja estará sometido á dos fuerzas x y z ó á su resultante F′; y se pondrá en equilibrio en la direccion del par (F′, — F′) que es diferente del par terrestre. El ángulo que la aguja forma con el horizonte en esta posicion de equilibrio, será un ángulo I′ diferente de I pero ligado con I por una sencilla relacion; pues en efecto I′ es el ángulo F′ A x que forma la resultante F′ con la componente x y se tendrá:

$$\text{tang. } I' = \frac{z}{x} = \frac{F \text{ sen } I}{F \cos I \cos \alpha} = \frac{\text{tang. } I}{\cos \alpha}$$

Acabamos de ver, que por medio de una aguja móvil en un plano horizontal, se puede determinar el meridiano magnético. Cuando la aguja de inclinacion puede moverse libremente en el plano del meridiano, da la direccion del par terrestre. En todo rigor no es indispensable que el plano de la aguja de inclinacion coincida con el meridiano, pues la direccion del par director pue-

de conocerse, aunque la aguja se mueva en cualquiera vertical. En efecto, coloquemos el plano vertical sucesivamente en dos posiciones, cuyos azimutes magnéticos (incógnitos) sean a y a', siendo $a' = a + m$, m expresa la diferencia de azimutes entre a y a', cantidad conocida. Tendrémos las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. I} = \text{tang. I}' \cos a \\ \text{tang. I} = \text{tang. I}'' \cos a'\end{array}\right\} (1)$$

Sacando el valor de cos a de la primera y sustituyéndolo en la segunda, se eliminará a y tendrémos:

$$\text{tang. I} = \text{tang. I}'' \left(\frac{\text{tang. I} \cos m}{\text{tang. I}'} + \text{sen } m \sqrt{1 - \frac{\text{tang.}^2 \text{I}}{\text{tang.}^2 \text{I}''}}\right)$$

Sacando á tang. ^{2}I como factor comun, y despejando á tang. I

$$\text{tang. I} = \frac{\text{sen } m \text{ tang. I}''}{\sqrt{1 - \frac{2 \text{ tang. I}'' \cos m}{\text{tang. I}'} + \frac{\text{tang.}^2 \text{I}''}{\text{tang.}^2 \text{I}'}}} \quad (2)$$

El valor de tang. I está en funcion de cantidades conocidas, y ésta fórmula nos permite conocer el valor de la inclinacion en el meridiano magnético, sirviéndonos de los valores obtenidos en otros planos. Conocido I y sustituido su valor en alguna de las relaciones (1) se obtendrá a. En resúmen, la direccion del par terrestre puede conocerse empleando una aguja móvil libremente en un plano vertical cualquiera. La fórmula (2) será incómoda para las aplicaciones. En la práctica se acostumbra hacer $m = 90°$ es decir, observar la inclinacion en dos planos verticales rectangulares; la fórmula (2) se convierte entónces:

$$\cot^2 \text{I} = \cot^2 \text{I}' + \cot^2 \text{I}''$$

DETERMINACION DEL MOMENTO DEL PAR TERRESTRE.

Habiendo obtenido la direccion de la fuerza magnética terrestre, réstanos determinar su momento con relacion á un iman dado, para que el "par" quede completamente definido. Esta determinacion puede hacerse neutralizando la accion del par terrestre por medio de fuerzas conocidas, pues es sabido que dos fuerzas son iguales cuando se equilibran. Este principio sirve de fundamento á los procedimientos que vamos á dar á conocer.

Método de Coulomb.—En el procedimiento seguido por este físico, el par terrestre se valúa equilibrando su accion por medio de la fuerza de torsion. El aparato que empleó este sabio en sus experiencias, se conoce con el nombre de "Balanza de Coulomb." Sus experiencias consistian esencialmente en suspender una aguja imantada de manera que pueda moverse libremente en un plano horizontal, y que puesta esta aguja en el meridiano, el hilo de que suspende no tenga torsion; la aguja se aparta en seguida de esta posicion de equilibrio introduciendo en el hilo una torsion N. que haria que la aguja, obedeciendo solamente al hilo, se colocará sin torsion en un azimut N^0. Mas como está sometida tambien á la accion terrestre, se colocará en el azimut ω^0, y el hilo tendrá una torsion, cuyo valor es $(N - \omega^0)$.

Sea (Figura 7ª) $a\ b = 2\,l$ la posicion de equilibrio de la aguja cuando coincide con el meridiano magnético, y $a'\ b' = 2\,l$ la posicion de la aguja en el azimut ω^0, (despues de que se ha dado al hilo la torsion N.)

La aguja en $a'\ b'$ está en equilibrio, pues por una parte la solicita la accion del par terrestre $(F_h, - F_h)$ para traerla al meridiano magnético, y por la otra en sentido inverso el par de torsion.

Se sabe que el momento del par de torsion es proporcional al ángulo de torsion; así es que designándolo por $M_t = C\ (N - \omega^0)$ y como la expresion del momento del par terrestre es

$$M = 2\,F_h\ l \text{ sen } \omega,$$

la ecuacion de equilibrio tendrá la forma

$$2\ F_h\ l\ \text{sen}\ \omega = C\ (N^0 - \omega)$$

De esta manera tendrémos el momento del par componente horizontal con relacion al iman empleado.

Segundo método.—El fundamento de este método consiste en equilibrar la accion del par terrestre con la de un peso conocido, que se coloca generalmente en una aguja de inclinacion en la extremidad opuesta á la que se encuentra bajo el horizonte; es decir, en sentido contrario á aquel en el que obra la inclinacion. Se suspende una aguja imantada, (Figura 7 vis) por su centro de gravedad, de manera que gire libremente en el plano meridiano magnético y que lleve cerca de una de sus extremidades un peso conocido, esperando á que la aguja quede en equilibrio.

La aguja quedará sujeta á dos sistemas de fuerzas: 1º al par terrestre, cuyo momento en la posicion de equilibrio actual es

$$M = 2\ F_t\ l\ \text{sen}\ (i \pm \beta)$$

siendo i el valor de la inclinacion y β el de la altura ó depresion de la aguja con respecto al horizonte, considerando á β positivo en el primer caso y negativo en el segundo. 2º A la accion del peso P sobre la aguja, cuyo momento

$$M' = P \times hr = P\ ho\ \cos\beta = P\ d\ \cos\beta.$$

La ecuacion de equilibrio será:

$$2\ F_t\ l\ \text{sen}\ (i \pm \beta) = P\ d\ \cos\beta$$

expresion del momento del par terrestre con relacion á un iman.

Los dos procedimientos descritos, permiten conocer en un lugar dado de la tierra, en igualdad de circunstancias y sirviéndose del mismo iman, las variaciones que en un período de tiempo cualquiera, sufre la intensidad de la fuerza que obra sobre el iman. Limitando aquí nuestras investigaciones, no estariamos en aptitud de comparar los distintos valores que en dos ó más localidades tiene la intensidad de la fuerza terrestre aplicada á un iman, pues para conseguirlo, tendriamos que servirnos siempre del mismo iman y trasportarlo á todas las localidades en que se quisiera experimentar, ó tendriamos que reducir todos los resultados obtenidos con varios imanes á un "tipo;" reduccion que presentaria grandes dificultades. Más adelante verémos los métodos que se emplean cuando se quiere estudiar la intensidad magnética absoluta; y fundándonos en nuevas nociones aprovecharémos los dos procedimientos descritos ya, para ese estndio.

CAPÍTULO III.

PÉNDULO MAGNÉTICO.

Ley de las acciones magnéticas.—Campo magnético.—Momento magnético de un iman.—Intensidad absoluta del magnetismo terrestre.—Métodos de Gauss, de Lloyd, de Coulomb.

Péndulo magnético.—Una aguja imantada, suspendida de manera que pueda moverse "libremente" en un plano horizontal y con la condicion de que el hilo del que se ha suspendido no tenga torsion, se colocará en el meridiano magnético despues de haber ejecutado algunas oscilaciones. Cuando el eje magnético de la aguja coincida con la meridiana magnética del lugar de la experiencia, la aguja habrá alcanzado su posicion de equilibrio. Si por una causa extraña, (por la proximidad de un objeto de acero por ejemplo), se aparta la aguja de su posicion de equilibrio y en seguida se hace cesar la causa perturbadora, se quita el objeto de acero, la accíon del par componente horizontal terrestre se ma-

nifiesta inmediatamente; su momento irá disminuyendo proporcionalmente al seno del arco de oscilacion hasta tener un valor nulo,[1] más en virtud de la fuerza de inercia se volverá á apartar de su posicion de equilibrio en sentido contrario, recorriendo un arco de oscilacion igual en amplitud al anterior. Llega un instante en que el par terrestre que entónces va creciendo, equilibra á la fuerza de inercia; la aguja se detiene un momento, pero solicitada por el par terrestre, volverá á repetir la misma serie de fenómenos y las oscilaciones continuarian indefinidamente si no hubiera resistencia de medios. Se ve que estos fenómenos que presenta un iman oscilante son análogos á los de un péndulo. Establecida esta similitud se aplicará á las oscilaciones ejecutadas por un iman en las condiciones precitadas la fórmula del péndulo compuesto:

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma\ m\ r^2}{M g a}}$$

en la que t es la duracion de una oscilacion infinitamente pequeña, $\Sigma\ m\ r^2$ el momento de inercia[2] del péndulo. $M g$ la fuerza aceleratriz y a la distancia del punto de aplicacion al eje de rotacion.

En el caso del péndulo magnético, se agrega la accion del par terrestre sobre los dos polos para producir el movimiento oscilatorio, y la fuerza aceleratriz es $2\ F_h$; en cuanto á la distancia del punto de aplicacion al eje de oscilacion es la semilongitud de la línea de los polos $2\,l$ y la fórmula se trasforma en la siguiente:

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma\ m\ r^2}{2\ l\ F_h}} \ \ldots\ldots\ (1)$$

1 En la posicion de equilibrio de la aguja, el momento del par componente horizontal es nulo, porque el brazo del par es cero y las dos fuerzas son diametralmente opuestas.

2 Se llama momento de inercia de un punto material con relacion á un eje, al producto de su masa por el cuadrado del radio de rotacion; este último mide la distancia de un punto del cuerpo al eje.

LEY DE LAS ACCIONES MAGNÉTICAS.

Fundado Coulomb en la consideracion del péndulo magnético, se sirvió de él para demostrar la siguiente ley fundamental del magnetismo terrestre: "Dos polos magnéticos, situados á una distancia d, se atraen ó se repelen, en razon inversa del cuadrado de sus distancias, y en razon directa del producto de sus masas magnéticas." Coulomb habia verificado la ley sirviéndose de su balanza ántes de usar el péndulo magnético; pero ninguna de las dos demostraciones es rigurosa, y vamos á citar la última que empleó aquel sabio, por ser la ménos imperfecta.

Considerémos el péndulo magnético en su posicion de equilibrio, y coloquemos verticalmente una barra larga imantada, en el meridiano magnético, de manera que el polo de esta barra que quede en el plano horizontal, sea de nombre contrario al más próximo de la barra suspendida, apartando en seguida esta última de su posicion de equilibrio. Como hemos supuesto con Coulomb que la barra perturbadora es bastante grande, no consideraremos más que el efecto de su polo que está contenido en el plano horizontal del péndulo. El péndulo oscilará entónces bajo la accion combinada del par componente horizontal terrestre y de las fuerzas del polo b.

Si llamamos φ al efecto de estas fuerzas, el tiempo de las oscilaciones tendrá por expresion:

1º El péndulo bajo la accion sola del par terrestre

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{2 F_h l}}$$

2º Sujeto al par terrestre y al polo b

$$t' = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{2 l (F_h + \varphi_1)}}$$

siempre que la distancia de los dos polos sea d_1.

El efecto φ_1 cambia con la distancia; será φ_2 á la distancia d_2, y el tiempo de oscilacion será:

$$t'' = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{2 l (F_h + \varphi_2)}}$$

De estas ecuaciones se deduce $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ en funcion de t' y t'', y en seguida se prueba experimentalmente que $\frac{t'}{t''}$ es sensiblemente igual $\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$, que es lo que se queria demostrar.

Esta verificacion de la ley se acerca tanto más á demostrarla á medida que $2\,l$ disminuye, que la amplitud de las oscilaciones es pequeña y que el iman perturbador es largo. La demostracion aun en estas condiciones es poco exacta, en razon de que la fuerza aceleratriz no es constante[1], y por lo mismo, no es rigurosamente aplicable la fórmula del péndulo.

Para la demostracion de la ley, en la parte que se refiere á las masas, dirémos que se considera la accion del par terrestre, proporcional á la masa de magnetismo concentrada en un polo de iman. Así es que si f es la fuerza aplicada á la unidad de magnetismo, $f\,\mu$ será la que esté aplicada á la masa u. La fórmula del péndulo dará para un iman de masa μ

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{2 l f_h \mu}}$$

1 Para convencerse, basta establecer la ecuacion de todas las fuerzas que obran sobre el péndulo en dos posiciones sucesivas.

Si hacemos oscilar imanes de la misma distancia polar, de la misma forma, pero de diferente grado de imantacion, obtendrémos una relacion entre la duracion de sus oscilaciones y sus masas. Conocida ya esta relacion, se va poniendo cada uno de los imanes á la misma distancia del péndulo, á fin de perturbar su movimiento, y así se comprueba que "dos imanes obran en razon directa del producto de sus masas magnéticas."

CAMPO MAGNÉTICO.

En la fórmula

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma\, m\, r^2}{2\, F_h\, l}}$$

la cantidad F_h representa la accion de la tierra sobre el iman, en las condiciones que hemos considerado. Esta accion depende de la distancia al polo terrestre y de la masa magnética del iman.

Toda region del espacio en la que se ejerce alguna fuerza, se llama "campo de esta fuerza;" así es que denominarémos "campo magnético" á todo espacio sometido á una accion magnética; é "intensidad del campo" á la magnitud de la fuerza aplicada á un punto de este campo, sobre la unidad de magnetismo.[1] El campo magnético es uniforme ó variable, segun que su intensidad sea constante ó variable. La tierra constituye un gran campo magnético variable; pero en un espacio reducido puede considerarse como uniforme, en virtud de que las distancias de los diferentes puntos de un espacio pequeño á los polos magnéticos de la tierra, son sensiblemente iguales. Sea F la intensidad del magnetismo terrestre, sobre un barra imantada de masa μ, y en un campo cu-

1 Se llama unidad de polo magnético ó de cantidad de magnetismo, al polo que, colocado á la unidad de distancia de otro polo igual, produce una fuerza repulsiva igual á la unidad de fuerza.

ya intensidad sea f. Tendrémos $F = f\,\mu$. $F_h = f_h\,\mu$, y sustituyendo en la fórmula del péndulo (1)

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma\, m\, r^2}{2\, f_h\, \mu l}} \quad (2)$$

El producto $2\,\mu l$ es lo que se llama momento magnético absoluto del iman.

DETERMINACION DE LA INTENSIDAD ABSOLUTA DEL MAGNETISMO TERRESTRE.

De la fórmula del péndulo (2) se deduce que el producto de la componente del par horizontal terrestre, por el momento absoluto del iman (es decir, el producto $2\, f_h\, \mu l$), es inversamente proporcional al cuadrado de la duracion de una oscilacion, y esa misma fórmula, determinando previamente el momento de inercia $\Sigma\, m\, r^2$ del péndulo, podrá dar el valor de ese producto. Pero cuando se conoce el producto de dos cantidades, fácil es determinarlas separadamente, con tal que se conozca además su cociente. Si llegamos á obtener una relacion entre f_h y $2\,\mu l$, podrémos determinar á $2\,f_h$.

Suspendamos un iman cualquiera, y en seguida desviémoslo de su posicion de equilibrio con el iman que nos ha servido en el péndulo, y cuyo momento absoluto es $2\,\mu l$. La magnitud de la desviacion dependerá de la relacion de la fuerza horizontal terrestre al momento del iman que causa la desviacion. Por el péndulo tendrémos (1) $2\,f_h\,\mu l = C$, siendo C una cantidad conocida; por la desviacion producida (2) $\frac{2\,ul}{f_h} = B$, siendo B una cantidad conocida. Dividiéndolas nos queda $f_h^2 = \frac{C}{B}$; y multiplicándolas tendrémos á $4\,\mu^2 l^2 = B\,C$. De esta última se deduce que el momento magnético del iman es igual á la raíz cuadrada de cantidades determinadas por las observaciones de oscilacion y de desviacion;

y de la otra, que la intensidad absoluta del magnetismo terrestre es igual á la raíz cuadrada del cociente de las mismas cantidades.

Por el anterior método podrémos conocer á f_t, es decir, la intensidad absoluta del magnetismo terrestre, independientemente del iman empleado, y conociendo á $2 \mu l$, bastará una observacion de desviacion ó de oscilacion para determinar á f_t. Sin embargo, es preferible practicar las dos operaciones siempre que se presente alguna ocasion favorable, para evitar los errores que pueden producir un cambio en la intensidad magnética del iman.

Someramente hemos indicado el procedimiento que permite determinar á f_t; establecido el principio general, vamos á pasar á los detalles del procedimiento. En la fórmula del péndulo que nos da el producto $2 f_h \mu l$ necesitamos conocer el momento de inercia del iman suspendido; comencemos, pues, por aprender á determinarlo, y cuando sea conocido, buscarémos la relacion $\frac{2 \mu l}{f_h}$ y expresándola en funcion de cantidades conocidas, habrá terminado nuestra investigacion.

DETERMINACION DEL MOMENTO DE INERCIA.

$\Sigma m r^2$.—Para determinar este momento, agreguémos á la barra magnética que ha constituido nuestro péndulo, un cuerpo que no sea magnético y que tenga forma geométrica. Si unimos este cuerpo á la barra y lo suspendemos por su centro de gravedad, formarémos un sistema que puesto á oscilar dará para la duracion de una oscilacion una cantidad t'. Llamando t la duracion de la oscilacion de la barra como estaba al principio y Q su momento de inercia $\Sigma m r^2$ tendrémos que

$$t^2 = \frac{\pi Q}{2 f_h \mu l}$$

y designando por Q' el momento de inercia del cuerpo que he-

mos agregado á la barra magnética, tendrémos igualmente que la oscilacion del sistema formado es:

$$t'^2 = \frac{\pi(Q+Q')}{2 f_h \mu l}$$

Dividiendo una por otra

$$\frac{t^2}{t'^2} = \frac{Q}{Q+Q'} \text{ de donde } Q = \frac{t^2 Q'}{t'^2 - t^2}$$

Esta relacion liga á Q con Q′ y basta conocer esta última cantidad para determinar á Q.

La mecánica general enseña á determinar el momento de inercia de cualquiera cuerpo de forma regular y referido á cualquiera eje; nosotros supondrémos para simplificar, que nuestro cuerpo adicional tiene la forma cilíndrica, que es por otra parte la que casi siempre se adopta en la práctica.

Se sabe que el momento de inercia es la suma de los productos que se obtienen multiplicando las masas $m\ m'\ m''$...... de los puntos materiales que componen un sólido invariable, por el cuadrado de las distancias $r^2\ r'^2\ r''^2\ r'''^2$ de estos puntos, á una recta cualquiera D. Si se ha calculado el momento de inercia $\Sigma\, m\, r^2$ con relacion á una recta, supongamos que se determina una línea K con la siguiente condicion:

$$\Sigma\, m\, r^2 = \text{M K}^2$$

siendo M la masa total del sólido, esta línea K se llama radio de giracion del sólido y puede definirse "el cociente del momento de inercia por la masa." Es tambien el radio de una superficie ci-

líndrica de revolucion, que tuviere la recta D por eje, y sobre la cual se pudiera repartir la masa toda entera del sólido, sin que su momento de inercia con relacion á esta recta, cambiara de valor.

Recordadas estas nociones de la mecánica general, vamos á buscar la expresion del momento de inercia de un cilindro respecto de un eje perpendicular al de figura y que pase por su centro. Si m es la masa de un punto del cilindro (Figuras 9 y 10) cuyas coordenadas sean x, y z, $m\ dx\ dy\ dz$ será la masa del elemento situado en ese punto y su distancia al eje de las x será:

$$\sqrt{y^2 + z^2}$$

de suerte que el momento de inercia del elemento considerado tendrá por expresion $m\ dx\ dy\ dz\ (y^2 + z^2$ y el del cuerpo:

$$m \int\int\int dx\ dy\ dz\ (\ y^2 + z^2\ )$$

integral que es igual á la suma de las dos siguientes:

$$m\ \int\int\int dx\ dy\ dz\ y^2\ (1)\ m\ \int\int\int dx\ dy\ dz\ z^2\ (2)$$

cuya integracion pasamos á efectuar

$$\int\int\int y^2\ dx\ dy\ dz = \int y^2\ dy \int dx\ \int dz$$

$$\int_{-l}^{+l} y^2\, dy \int_{-\sqrt{r^2 - z^2}}^{+\sqrt{r^2 - z^2}} dx \int_{-r}^{+r} d\,z = \frac{4\ l^3}{3} \int_{-r}^{+r} (\ r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}\ dz\ (3)$$

Fundándonos en una de las fórmulas de la integracion por partes de las diferenciales binomias que es:

$$\int x^{m}(a+bx^{n})^{p}\,dx=\frac{x^{m+1}(a+bx^{n})^{p}}{n+1+np}+\frac{a\,n\,p}{m+1+np}\int x^{m}(a+bx^{n})^{p}dx$$

tendrémos:

$$\int_{-r}^{+r}(r^2-z^2)^{\frac{1}{2}}dz=\frac{z\,(r^2-z^2)^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{r^2}{2}\int_{-r}^{+r}\frac{dz}{\sqrt{r^2-z^2}}=\frac{\pi\,r^2}{2}\quad(4)$$

Busquemos la integral del segundo término:

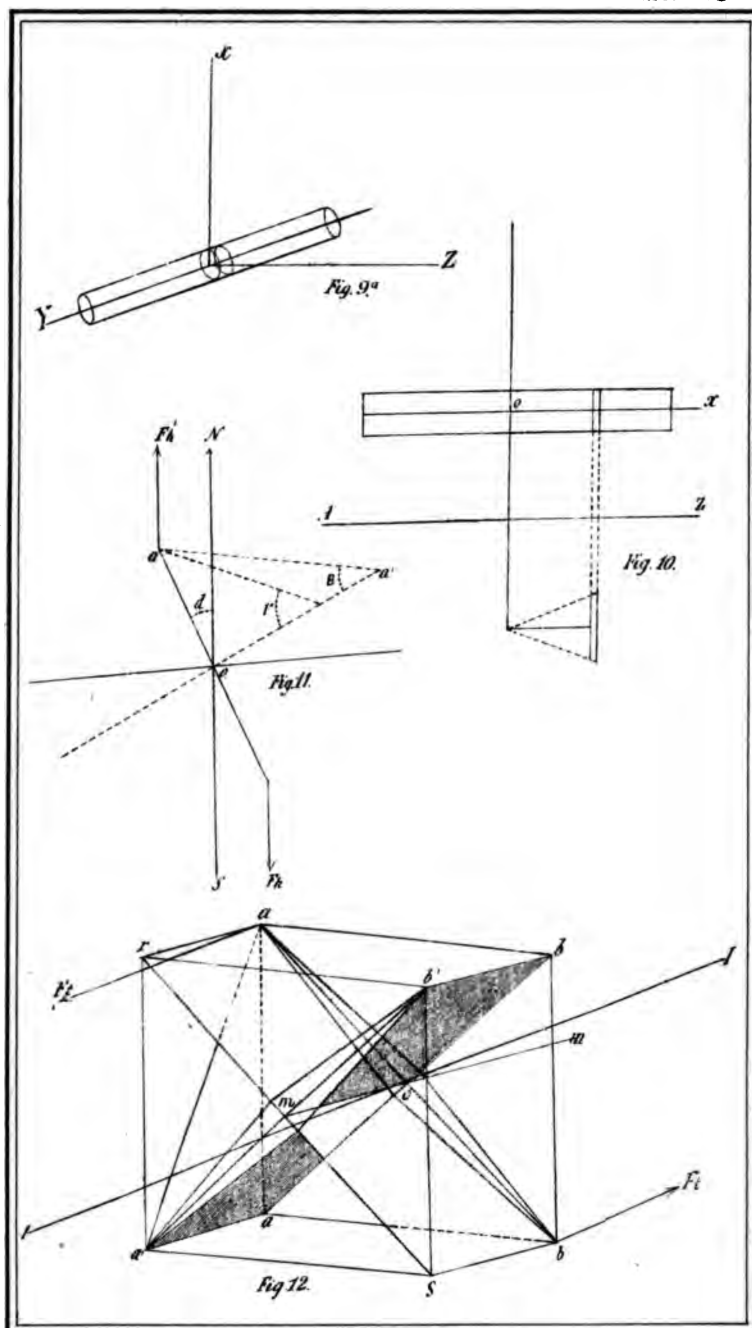
$$\int\int\int dy\,dx\,dz\,z^2=\int dy\int dx\int z^2\,dz$$

$$\int_{-l}^{+l}dy\int_{-\sqrt{r^2-z^2}}^{+\sqrt{r^2-z^2}}dx\int_{-r}^{+r}z^2\,dz=4\,l\int_{-r}^{+r}(r^2-z^2)^{\frac{1}{2}}z^2\,dz\quad(5)$$

Empleando la segunda fórmula conocida de integracion por partes

$$\int x^{m}(a+bx^{n})^{p}\,dx=\frac{x^{m-n+1}(a+bx^{n})^{p+1}}{(m+1+np)\,b}-\frac{(m-n+1)\,a}{(m+1+np)\,b}$$

$$\int x^{m-n}(a+bx^{n})^{p}dx$$



LIT. DEL TIMBRE.



tendrémos:

$$\int_{-r}^{+r} (r^2-z^2)^{\frac{1}{2}}\, z^2\, dz = \frac{z\,(r^2-z^2)^{\frac{3}{2}}}{-4} + \frac{r^2}{4}\int_{-r}^{+r} (r^2-z^2)^{\frac{1}{2}}\, dz = \frac{\pi\, r^4}{8} \quad (6).$$

Sustituyendo los valores de las fórmulas (4) y (6) en las (5) y (3) respectivamente y los de las (5) y (3) una vez verificada la sustitucion, en las (1) y (2) tendrémos como expresion última para el momento de inercia buscado.

$$Q' = 2\,\pi\, r^2\, l \left(\frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right)$$ [1]

Como el momento de inercia $\Sigma\, m\, r^2$ de nuestro péndulo magnético está ligado al momento del cuerpo adicional que se acaba de determinar, en funcion de cantidades conocidas, ya puede ser determinado; y por lo mismo, el producto $2\, f_h\, \mu\, l$ lo será tambien. Busquemos ahora el cociente de f_h y $2\, \mu\, l$.

Sea N S la meridiana magnética (figura 11) con la que se confunde el eje del iman *ab*, cuando está solicitado únicamente por la accion de la tierra; *ab* el iman suspendido, y *a'b'* un iman que llamarémos desviador, y cuyo eje debe coincidir con una perpendicular á la línea de los polos del *ab*, debe pasar por el centro de la misma y estar contenido en un plano horizontal.

El iman *ab*, sometido á la influencia del iman desviador, se aparta del meridiano magnético un ángulo α. En esta nueva posicion de equilibrio el iman está sujeto: primero, al par componente horizontal terrestre que tiende á traer al iman *ab* á la línea N S; segundo, á las fuerzas que resultan de las atracciones y repulsiones de los polos *a* y *b* sobre *a'* y *b'*. Por la simetría de la figura se comprende que basta estudiar la accion de uno de los polos del iman móvil sobre los dos del iman fijo y en seguida duplicar el resultado.

1 En el caso en que se haga oscilar junto con la barra imantada otro cuerpo que aunque de forma regular no tenga la cilíndrica, puede buscarse el momento de inercia por un procedimiento análogo al expuesto.

Establezcamos la ecuacion de equilibrio, para lo que notarémos: primero, que todos los elementos están en un plano y que la ecuacion de equilibrio es que la suma de las proyecciones de las fuerzas sobre la recta del iman desviador sea nula.

Tomemos una de las componentes del par terrestre f_h [*p. e.*] proyectada sobre la línea $a'\,o$, será igual á $2\,f_h$ sen α.

La proyeccion de la fuerza ab' será igual á $\frac{\mu\mu'}{ab'^2}$ sen γ; la proyeccion de la fuerza repulsiva $a'\,a$ será $-\frac{\mu\mu'}{a'\,a^2}$ sen β, la ecuacion de equilibrio tendrá la siguiente forma:

$$2\left(f_h\,\mu' \text{ sen } \alpha + \frac{\mu\,\mu'}{ab'^2}\cos\gamma - \frac{\mu\,\mu'}{a\,a'^2}\cos\beta\right) = 0$$

y dividiendo por $2\,\mu'$, quedará

$$f_h \text{ sen } \alpha + \frac{\mu}{ab'^2}\cos\gamma - \frac{\mu}{a\,a'^2}\cos\beta = 0 \quad (1)$$

y como

$$\cos\gamma = \frac{d-l}{ab'} \text{ y } \beta = \frac{d+l}{a\,a'}$$

la ecuacion (1) se convertirá

$$(2)\ f_h \text{ sen } \alpha + \frac{\mu\,(d-l)}{ab'^3} - \frac{\mu\,(d+l)}{a\,a'^3} = 0,$$

igualmente sabemos que

$$a\,b' = \sqrt{l'^2 + (d-l)^2}$$

(llamando d, las distancias oo') y

$$a\,a' = \sqrt{l'^2 + (d+l)^2}$$

la (2) se convertirá en

$$f_h \text{ sen } \alpha = \frac{\mu\,(d+l)}{(\sqrt{l'^2 + (d+l)^2})^3} - \frac{\mu\,(d-l)}{(\sqrt{l'^2 + (d-l)^2})^3} \quad (3)$$

Pasando al numerador los denominadores, quedará:

$$f_h \text{ sen } \alpha = \mu\, (d + l)\, (l'^2 + (d + l)^2)^{-\frac{3}{2}} - (d - l)\, (l'^2 + d - l)^2)^{-\frac{3}{2}}$$

ejecutando el desarrollo indicado hasta los términos de 5.º órden, respecto á d, y llamando P la funcion de l y l' que resulte, quedará:

$$(4) \quad \frac{2\,\mu\, l}{f_h} = \tfrac{1}{2}\, d^3 \text{ sen } \alpha \left(1 - \frac{P}{d^2}\right)$$

El primer término de esta ecuacion da el cociente que venimos buscando en funcion de una cantidad P, que depende de l y l', y que á su vez se puede determinar, variando la distancia d á la que se ha efectuado la desviacion. En efecto, para otra distancia d', la fórmula dará:

$$(5) \quad \frac{2\,\mu l}{f_h} = \tfrac{1}{2}\, d'^3 \text{ sen } \alpha' \left(1 - \frac{P}{d'^2}\right)$$

igualando (4) y (5) tendrémos:

$$d^3 \text{ sen } \alpha \left(1 - \frac{P}{d^2}\right) = d'^3 \text{ sen } \alpha' \left(1 - \frac{P}{d'^2}\right)$$

$$d^3 \text{ sen } \alpha - P\,d \text{ sen } \alpha = d'^3 \text{ sen } \alpha' - P\,d' \text{ sen } \alpha'$$

despejando á P

$$P = \frac{d'^3 \text{ sen } \alpha' - d^3 \text{ sen } \alpha}{d' \text{ sen } \alpha' - d \text{ sen } \alpha}$$

RESÚMEN DEL MÉTODO DE GAUSS.

En resúmen: para determinar la intensidad absoluta del magnetismo terrestre en un lugar dado:

1.º Se determina la duracion de una oscilacion de una barra imantada, sujeta únicamente á la influencia del par terrestre.

2.º La duracion de la oscilacion del sistema formado por la barra citada ántes, unida al cuerpo adicional; así se conoce el momento de inercia del péndulo y el producto $2\, f_h\, \mu l$.

3º Se desvia otro iman, valiéndose del que nos sirvió en el péndulo, y obtendrémos á $\frac{f_h}{2\,\mu l}$ en funcion del ángulo de desviacion a, de la distancia de los imanes y de las distancias polares de los mismos que entran en la funcion P. Para determinar á P, basta en todo rigor ejecutar dos desviaciones á distancias distintas; pero en general será conveniente multiplicar más el número de observaciones. Combinando en seguida las dos desviaciones para tener á P, sustituyendo este valor en (4), se tendrá $\frac{2\,\mu l}{f_h}$, y como ántes se tenia ya $2\,f_h\,\mu l$, dividiéndolas se encontrará á f_h en funcion de cantidades conocidas. Así habrémos obtenido la intensidad de la componente horizontal de la fuerza magnética. Para obtener la de la fuerza total, bastará dividir á f_h por el coseno de la inclinacion correspondiente á la localidad en que se opera, para lo cual se necesita hacer simultáneamente las experiencias de oscilacion y desviacion con las de inclinacion. Con el mismo procedimiento podemos determinar el momento magnético del iman, á $2\,\mu\,l$; pues para esto basta multiplicar $\frac{2\,\mu l}{f_h}$ por $2\,f_h\,\mu l$. En una estacion en que se hayan practicado una observacion de oscilacion, dos de desviacion á diferentes distancias y una de inclinacion, se conocerá la cantidad P, la intensidad absoluta del magnetismo $\frac{f_h}{\cos i}$, y el momento magnético $2\,\mu l$. Para ver en seguida las variaciones que sufre la fuerza magnética, se puede en todo rigor practicar una serie de observaciones ó de desviacion únicamente, ó de oscilacion; pues si examinamos las fórmulas correspondientes, vemos que, conociendo á P y $2\,\mu l$, se puede determinar en la desviacion á f_h, y en la de oscilacion bastará conocer á $2\,\mu l$. Es de advertir que esta cantidad, $2\,\mu l$, puede considerarse como constante, y que P lo es.

MÉTODO COULOMB.

Al mismo resultado podrá llegarse siguiendo el método empleado por Coulomb, para la determinacion del momento del par terrestre con relacion á un iman dado. En efecto; la expresion obtenida por aquel sabio

$$2\,f_h\,\mu l \text{ sen } a = C\,(N - \omega)$$

se ve que contiene el producto $2\ f_h\ \mu l$ en funcion de cantidades conocidas. Si con la misma aguja desviamos á otra, obtendriamos una relacion entre μl y f_h, siguiendo un camino análogo al desarrollado. Esta relacion permitiria eliminar el momento absoluto del iman y llegar á conocer la componente horizontal del par terrestre.

OTRO MÉTODO.

El segundo método que empleamos para determinar el momento del par terrestre con relacion á un iman dado, puede servir de base para conocer la intensidad absoluta del magnetismo terrestre. La fórmula á que llegamos

$$2\ f_t\ \mu l \text{ sen } (i \pm \beta) = \text{P}d \cos \beta$$

contiene el producto $2\ \mu l$ y f_t si empleando la misma aguja para desviar á otra, podemos tambien conocer el cociente de las mismas cantidades.

Pasamos á desarrollar el método.

Sea *ab* una aguja colocada en el plano meridiano magnético y que puede girar libremente al derredor del eje horizontal *mn* (que por la perspectiva aparece oblícuo en la figura 12), y sea *a′ b′* el eje de la aguja empleada en la primera parte de la operacion (la aguja que lleva el peso P), colocada en un plano paralelo al del meridiano magnético, y de tal manera, que su centro *m* esté en una línea horizontal, perpendicular al plano meridiano y que pasa por el centro de la aguja *ab*. La aguja *ab*, solicitada únicamente por la accion de la tierra, se hubiera colocado en su plano, formando un ángulo con la horizontal igual á la inclinacion correspondiente al lugar, en el momento de la experiencia (la direccion de la inclinacion es II); pero sujeta á la vez á la accion de la tierra y á la de los polos de la aguja desviadora *a′ b′*, tomará una posicion de equilibrio distinta de la primera. Si se hace girar la aguja *a′ b′* al derredor de su centro *m*, el ángulo entre las dos agujas irá cambiando, y por lo mismo, las distancias de los polos variarán; entónces la aguja *ab* irá tambien cambiando de posicion.

Se moverá $a'\,b'$ hasta conseguir que quede perpendicular á ab. Veamos en esta posicion cuál es la ecuacion de equilibrio.

Las fuerzas que obran, son: Primero. El par terrestre (cuyas fuerzas son $(f_t - f_t)$, cuyo momento con relacion á un eje perpendicular al meridiano, es:

$$2\, f_t\, \mu' l \text{ sen } (i \pm \gamma).$$

Segundo. La accion del polo b' sobre el polo a.
Tercero. La accion del polo a' sobre el polo b.
Cuarto. La de a' sobre a.
Quinto. La de b' sobre b.

Notemos desde luego que la intensidad de las cuatro últimas fuerzas es igual en todas ellas, puesto que las expresiones de la intensidad

$$\frac{\mu\,\mu'}{a\,b'^2} \quad \frac{\mu\,\mu'}{b\,a'^2} \quad \frac{\mu\,\mu'}{a\,a'^2} \text{ y } \frac{\mu\,\mu'}{b\,b'^2}$$

son iguales, por tener el mismo numerador é iguales denominadores. Harémos notar tambien que como todas estas fuerzas obran oponiéndose á la accion del par terrestre (como es fácil verlo en la figura, recordando que $a'\,b'$ queda fija, y la ley de las atracciones y repulsiones).

Si tomamos una fuerza cualquiera de éstas, ab' (p. e.), y la descomponemos en dos, una contenida en el plano meridiano y otra normal á este plano; la primera es ab'' y la segunda $ar = b'b''$, y descomponiendo de una manera análoga á la fuerza $a'b$ en $a''b$ y en bs; y á la $a'a$ en aa'' y ar, y á bb' en $b''b$ y bs. Como las fuerzas ab' y ba' son atractivas y las bb' y aa' repulsivas, sus respectivas componentes serán de signo contrario, y las cuatro componentes normales $ar, -ar$, $bs, -bs$, se destruirán de dos en dos.

En cuanto á las otras cuatro fuerzas componentes, hay que notar que están en el mismo plano; que son iguales en intensidad y opuestas de dos en dos. Luego ab'' con ba'' formarán un par y

aa'' y $b''b$ formarán otro; pares que tienen brazos iguales, puesto que miden la distancia entre los lados opuestos de un rombo.

Busquemos sus momentos.

$$\text{M* par } (ab'', -a''b) = f^* \, ab'' \times b''t,$$

siendo $b''b$ el brazo de palanca del par.

$$\text{M par } (aa'', -b''b) = f \, aa'' \times b''t,$$

expresando el valor de las fuerzas, y sustituyendo en lugar de $b''t$ su valor, quedará

$$\frac{\mu\mu'}{ab'^2} \text{ sen } ab'b'' \times b''b \text{ sen } b''ba'' \ldots\ldots (a)$$

$$\frac{\mu\mu'}{aa'^2} \text{ sen } aa'a'' \times b''b \text{ sen } b''ba'' \ldots\ldots (b)$$

Vamos á trasformar estas expresiones: tenemos

$$ab'^2 = ab''^2 + b'b''^2$$

$$b'b'' = d' \text{ (distancia entre las dos agujas)}$$

$$ab''^2 = l^2 + l'^2$$

siendo l y l' las semilongitudes de las mismas agujas.

$$\text{sen } ab'b'' = \frac{ab''}{ab'} = \sqrt{\frac{l^2 + l'^2}{ab'}}, \; b''b = \sqrt{l^2 + l'^2}$$

$$\text{sen } b''ba'' = 2 \text{ sen } b''bo \cos b''bo, \; b''bo = \tfrac{1}{2} \, b''ba''$$

$$\text{sen } b''bo = \frac{l}{\sqrt{l'^2 + l^2}} \cos b''bo = \frac{l'}{\sqrt{l'^2 + l^2}}$$

* M = momento. f = fuerza.

operando en (a) las sustituciones, quedará:

$$2 \frac{\mu\mu'}{l^2+l'^2+d'^2} \cdot \frac{\sqrt{(l^2+l'^2)}}{\sqrt{l^2+l'^2+d'^2}} \cdot \sqrt{l^2+l'^2}.$$

$$\frac{l l'}{l'^2+l^2} = \frac{2\,\mu\mu'\,l l'}{(l^2+l'^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Como aa' es igual con ab', ya conocerémos su valor, y además $aa'a'' = ab'b''$ y el brazo del par es igual, el valor de (b) será igual al de (a), y por último, la ecuacion de equilibrio será

$$2\,f_t\,\mu' l' \operatorname{sen}(i \pm \gamma) = \frac{4.\,\mu\mu'\,l l'}{(l^2+l'^2+d'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(A)}$$

Dividiendo la (A) por $2\,\mu' l'$ quedará:

$$f_t \operatorname{sen}(i \pm \gamma) = \frac{2\,\mu\,l}{(l^2+l'^2+d'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de donde

$$\frac{f_t}{2\,\mu\,l} = \frac{1}{\operatorname{sen}(i \pm \gamma)\,(l^2+l'^2+d'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Las fórmulas definitivas en este último método son las siguientes:

$$2\,f_t\,\mu\,l \operatorname{sen}(i \pm \beta) = \mathrm{P}d \cos \beta \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{f_t}{2\,\mu\,l} = \frac{1}{\operatorname{sen}(i \pm \gamma)\,(l^2+l'^2+d'^2)^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots (2)$$

Multiplicándolas y llamando

$$\mathrm{R} = (l^2+l'^2+d'^2)^{\frac{3}{2}}$$

obtendrémos

$$f_t^2 = \frac{Pd}{R} \cdot \frac{\cos\beta}{\text{sen}\,(i \pm \gamma)\ \text{sen}\,(i \pm \beta)} \quad (3)$$

dividiéndolos

$$4\,\mu\, l^2 = Pd\cos\beta\,\frac{\text{sen}\,(i \pm \gamma)\ \text{sen}\,(i \pm \beta).\ R}{\text{sen}\,(i \pm \beta)}$$

Así obtendriamos el valor de f_t ó de μl, siempre que conozcamos previamente el valor de Pd y de R. Si valiéndonos de otro método hemos determinado el mismo dia á f_t, sirviéndonos del método de Gauss (p. e.), conocerémos en la ecuacion (3) á $\frac{Pd}{R}$ y si directamente hemos medido á P y á d, podrémos conocer á R.

Este último método es digno de recomendarse en la práctica, en razon de que solamente exije el empleo de una brújula de inclinacion (una vez que se ha determinado el valor de la constante $\frac{Pd}{R}$), miéntras que en el de Gauss se necesita usar dos instrumentos, la brújula de inclinacion y un magnetómetro, y este último es de difícil conduccion.

En la práctica se procede así: En una estacion fija, sirviéndose del método de Gauss, se determina el valor de f_t al mismo tiempo, usando la brújula de inclinacion á i, β y γ, por medio del último método descrito. Con estos valores se conocerá á $\frac{Pd}{R}$. Desde este momento puede ya utilizarse solo el método descrito para conocer en cualquier lugar á f_t con la brújula de inclinacion únicamente.

CAPÍTULO IV.

INSTRUMENTOS Y MÉTODOS DE OBSERVACION EMPLEADOS EN EL ESTUDIO DEL MAGNETISMO TERRESTRE.

Numerosos son los sistemas de instrumentos que se han empleado para el estudio del magnetismo terrestre, y muchas las modificaciones que en cada uno de ellos se han hecho. Describir todos presentaria la utilidad de conocer la evolucion que en su desarrollo ha seguido el magnetismo terrestre. Ciertamente es de un gran interes para el completo conocimiento de una ciencia seguir paso á paso todos sus adelantos; ir analizando uno á uno los métodos de que se ha servido, y conocer cuáles modificaciones se han ido sintiendo imperiosas y urgentes en los mecanismos de los instrumentos, pues sólo contando con todas estas enseñanzas es como se puede llegar á poseer el espíritu de la ciencia estudiada. Pero en los estrechos límites de apuntes como éstos, y para el objeto práctico que nos hemos propuesto, bastará describir los instrumentos que principalmente se han usado con éxito en el estudio del magnetismo terrestre.

Como el estudio del magnetismo comprende: la determinacion en valor absoluto de la declinacion, inclinacion é intensidad, dividirémos los instrumentos que vamos á describir, en tres clases, comprendiendo cada una de ellas todos los instrumentos adecuados esencialmente, para dar cada uno de los elementos arriba citados.

DECLINACION.—BRÚJULAS DE DECLINACION ABSOLUTA.

Brújula comun de declinacion.—Recordarémos que la declinacion es el ángulo que en un lugar de la tierra forman los meridianos astronómico y magnético. El instrumento que permita la

medida de la declinacion, debe estar dotado de los accesorios necesarios para la determinacion de ambos planos y del ángulo que entre sí forman.

Para la determinacion del meridiano astronómico, se pueden emplear distintos métodos; pero los principalmente usados exigen disponer de un telescopio móvil al derredor de dos ejes, uno horizontal y otro vertical. Para la del magnético bastará una aguja magnética suspendida por su centro de gravedad, móvil en un plano horizontal y cuyo eje de figura coincida con el eje magnético; pues una aguja en estas condiciones, segun se ha visto ya, se coloca en la direccion del meridiano magnético. Una graduacion horizontal permitirá medir el ángulo que entre sí forman estos meridianos.

Los modelos comunes de brújula de declinacion, constan esencialmente de una caja circular de cobre (para disminuir las oscilaciones) en cuyo centro hay un pivote en el que descansa una aguja imantada. A las paredes de la caja van unidos dos montantes en los que se apoyan los muñones del eje horizontal de un telescopio: paralelamente á este eje se encuentra un nivel con los tornillos necesarios para su correccion. La caja de cobre se termina en su parte inferior por un eje cónico concéntrico con el pivote en que descansa la aguja; eje que se ajusta en un collar que en su parte superior lleva un disco graduado y en la inferior es solidario á un tripié con tornillos niveladores. La caja de cobre en su interior tiene una segunda graduacion concéntrica con la anterior y una línea de fe contenida en el plano vertical que pasa por la línea de colimacion del anteojo. La línea de fe lleva en sus extremos las letras N y S. El instrumento tiene dos verniers opuestos, unidos á la caja, y está dotado de los tornillos de presion y de aproximacion necesarios para todos los movimientos del instrumento. Algunas veces se construye la brújula de declinacion poniendo el anteojo paralelo á la línea Norte–Sur.

MANERA DE DETERMINAR LA DECLINACION.

Se nivela el instrumento hasta conseguir que en una rotacion completa del limbo permanezca inmóvil la burbuja del nivel paralelo al círculo horizontal. Despues se establece el paralelismo entre el eje horizontal del anteojo y el plano del limbo, correccion que puede hacerse sirviéndose del nivel que con este objeto tiene el instrumento. En seguida se destruye el error de la línea de colimacion.[1]

Efectuadas estas correcciones, se pone el anteojo en el plano del meridiano astronómico y se hacen las lecturas de los nonius; en seguida se mueve azimutalmente hasta que la línea Norte-Sur quede cubierta por la aguja. Se hacen las nuevas lecturas, y la diferencia entre éstas y las primeras da el valor de la declinacion.

La brújula de declinacion es un instrumento poco preciso; aun suponiendo verificadas las anteriores correcciones, pueden quedar en el instrumento varias causas de error que provengan de que no satisfaga á las condiciones siguientes:

1ª La línea Norte-Sur debe ser perpendicular al eje horizontal de rotacion del anteojo.

2ª El eje magnético de la aguja debe coincidir con su eje de figura y pasar por el centro de suspension.

3ª El pivote sobre que descansa la aguja debe coincidir con el eje vertical del instrumento.

Es muy difícil lograr que todas estas condiciones queden satisfechas, y aun suponiéndolas realizadas, quedaria todavía la incertidumbre de las lecturas hechas con las extremidades de la aguja, pues por más fina que ésta sea, se comete un error, debido á

1 Se llama línea de colimacion, á la línea que une el centro del objetivo con el centro de la retícula, y error de colimacion á la falta de coincidencia entre la línea de colimacion y el eje óptico del anteojo. La colimacion se corrige por varios procedimientos, cuyo fundamento comun es invertir el anteojo, sea sobre su eje de figura ó moviendo 180° al derredor de su eje vertical. Si ántes y despues de la inversion se ha visado un punto lejano, el error de colimacion se manifestará duplicado y se podrá corregir moviendo los tornillos de la retícula y el tornillo de aproximacion del movimiento azimutal.

que las visuales no se dirigen constantemente bajo el mismo ángulo.

Para evitar la influencia de los anteriores errores, es conveniente tomar por valor de la declinacion el promedio de las declinaciones obtenidas:

1º Leyendo siempre las dos extremidades de la aguja. 2º Invirtiendo las caras de la aguja. 3º Cambiando el sentido de la imantacion. 4º Haciendo girar el instrumento 180° y repitiendo las anteriores operaciones. Seria fácil demostrar que operando de esta manera se elimina el efecto de las anteriores causas de error. Pero siendo la aproximacion de esta brújula, muy corta, casi nunca valdrá la pena de operar como se acaba de prescribir.

Para servirse de la brújula en la determinacion de la declinacion, se distinguen dos casos:

1º Cuando se conoce la graduacion correspondiente al meridiano astronómico, y

2º Cuando se necesita comenzar por determinarla. En el primer caso, bastará tomar la diferencia de lecturas entre la correspondiente al meridiano y la que se obtiene cuando la aguja coincide con la línea Norte–Sur.

En el segundo caso, se necesita determinar previamente el meridiano astronómico.[1]

DECLINÓMETRO DE GAMBEY.

Este es otro instrumento que se usa para la medida de la declinacion. Sobre un tripié con tornillos niveladores está montado un círculo azimutal fijo y graduado finamente: en el tripié entra un eje que soporta toda la parte superior del instrumento, de manera que gira al derredor de este eje y que sus posiciones se miden sobre el círculo por medio de dos verniers opuestos.

Las piezas móviles que soporta el eje, tienen dos objetos distintos: unas sirven para llevar un iman y otras para efectuar ob-

1 Para determinar el meridiano astronómico puede emplearse el método de alturas iguales del sol, ó de una misma estrella, métodos que se pueden estudiar en un tratado de astronomía práctica.

servaciones astronómicas que permitan la determinacion de la meridiana.

Describirémos estas últimas (Figura 13): Dos columnas de cobre sostienen en su parte superior un anteojo que se mueve en un plano vertical, y en su parte inferior se juntan por medio de una plataforma tambien de cobre que sirve de base á una caja en la que se encierra el iman. El anteojo puede sufrir un movimiento lateral, esto es, acercarse ó uno ó á otro de los montantes, teniendo uno de estos últimos un movimiento en el sentido vertical para corregir la horizontalidad del eje. El procedimiento que se usa con este instrumento para el trazo del meridiano es el de alturas iguales del sol ó de una estrella.[1]

Conocida la graduacion meridiana, puede procederse á la medida de la declinacion. Véase como está dispuesto el declinómetro para ese objeto:

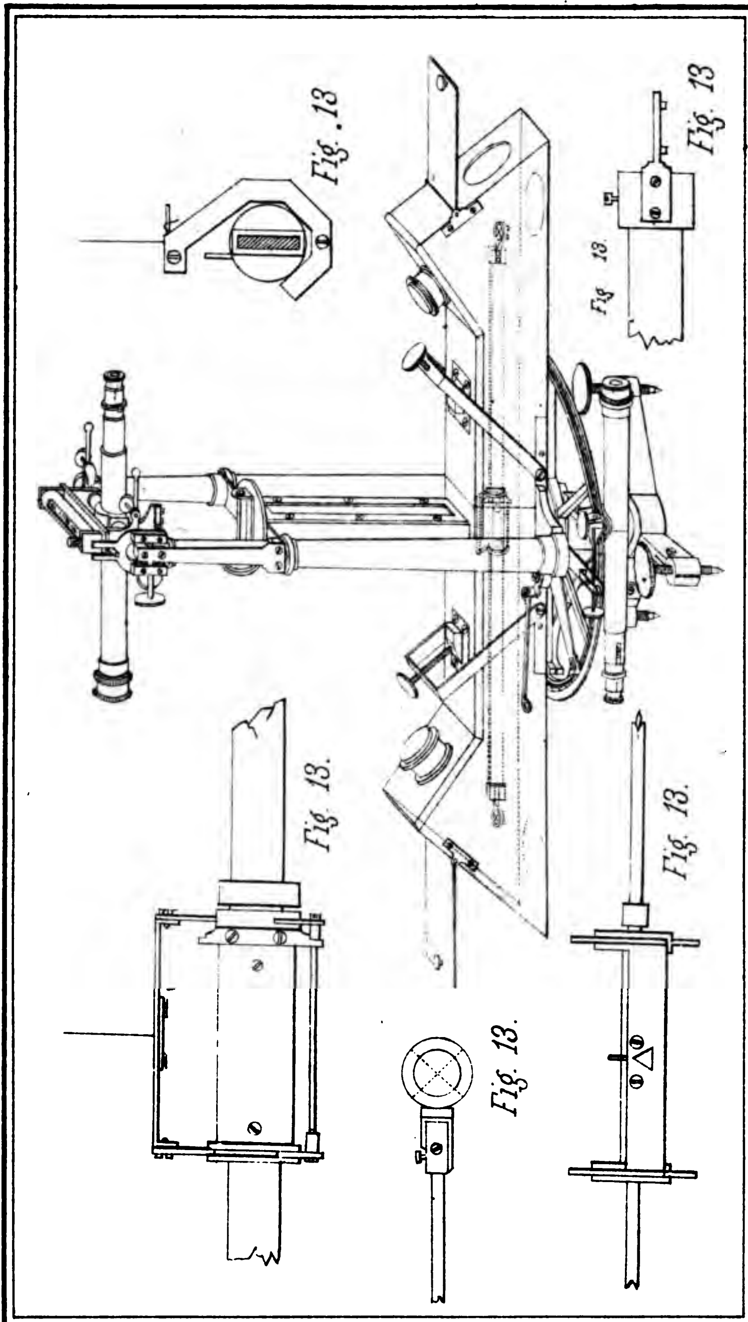
En los montantes se encuentra una pieza que soporta un torno en el que se enreda un haz de hilos de seda, y que en su parte inferior sostiene un estribo que sirve para llevar un largo iman. El iman termina en sus extremidades por dos anillos que tienen una retícula cada uno de ellos. El torno tiene un movimiento al derredor de un eje vertical que pasa por su centro; movimiento que se aprecia por medio de una graduacion colocada horizontalmente. Esta disposicion sirve para la medida de la torsion. El iman está encerrado en una caja de cobre en el centro y que se completa con otras dos cajas, de madera, móviles. Estas últimas tienen un vidrio plano colocado convenientemente para poder visar con el anteojo el centro de las retículas que lleva el iman.

Se comprende que una vez conocida la graduacion meridiana, si se mueve el instrumento en azimut hasta que el plano vertical que pasa por el eje del anteojo, pase tambien por el eje magnético, el ángulo recorrido será la declinacion.

El declinómetro de Gambey tiene además un nivel montante y los tornillos de presion y de aproximacion necesarios.

Como el anteojo se emplea para visar un astro, cuya distancia al observador puede considerarse como infinita, y para visar el

1 No se puede emplear procedimiento que exija el conocimiento de la distancia zenital, por no tener círculo vertical el instrumento.



LIT. DEL TIMBRE.

centro de la retícula colocada muy cerca de él, con un mismo objetivo no se podria convenientemente obtener dos focos tan distintos, Gambey en su instrumento logra satisfacer la condicion citada sirviéndose de dos objetivos, dispuestos de la manera siguiente: uno de ellos tiene un radio muy grande y el otro está colocado en el centro (sobrepuesto) y tiene un radio muy pequeño. El conjunto de las dos lentes forma una lente mucho más convergente que la de gran radio. El anteojo puede servir para visar objetos muy próximos, por la parte central y muy lejanos por la parte anular.

MANERA DE MEDIR LA DECLINACION.

Se nivela el instrumento y en seguida se suspende el estribo destinado á llevar la aguja. Como suponemos que el hilo debe tener una torsion, el estribo comenzará á dar vueltas hasta quitar esta torsion. Cuando el estribo esté en reposo, se hará girar el torno del que se suspende el hilo hasta conseguir que el estribo quede en una posicion paralela á los costados de la caja de cobre. Entónces se montará la barra imantada en su estribo y se moverá azimutalmente el instrumento visando por el anteojo una de las retículas que en sus extremidades lleva el iman, hasta que el centro de la retícula de la barra haga oscilaciones iguales á uno y otro lado del centro de la retícula del anteojo. En esta posicion el eje del anteojo (cuya línea de colimacion debe haber sido previamente corregida), se encontrará en el plano meridiano magnético. Se hace entónces la lectura de los nonius y restando esta lectura de la correspondiente al meridiano astronómico se tendrá la declinacion.

En el caso de que no sea conocida la graduacion correspondiente al meridiano astronómico, se comienza por determinar este último.

Las condiciones que tácitamente hemos supuesto para poder usar este instrumento, son: 1º Que el eje magnético de la barra y el plano vertical que pasa por el anteojo, se intercepten en el eje vertical del instrumento. 2º Que el eje magnético y la línea

que une los centros de la retícula, se confundan. 3º Que el eje magnético pase por el centro de suspension.

Como las condiciones supuestas son en extremo difíciles de llenar, en vez de investigar la manera de satisfacerlas absolutamente, se procede de manera que se eliminen.

Si no están satisfechas la 1ª y la 3ª de las condiciones enunciadas, es decir, si hay error de excentricidad, la declinacion obtenida no será la verdadera; pero como sabemos que la medida de un ángulo excéntrico es la semisuma de los arcos que sus lados abrazan, para eliminar el error bastará visar las dos retículas con el anteojo y tomar la semisuma de las declinaciones así obtenidas; pero esto seria exacto, en el caso de que se verifique la segunda condicion. Para eliminar el error que pueda provenir de que esta condicion no se haya llenado, se invertirán las caras de la aguja y se tomará el promedio de las lecturas obtenidas operando como ántes se ha dicho.

En resúmen: para la determinacion de la declinacion, hay que hacer ocho lecturas; cuatro con la primera cara de la aguja, (N. y S.) y cuatro invirtiendo la aguja; entendiéndose que se observa en posicion directa é inversa del anteojo, á fin de eliminar el error de colimacion que haya podido quedar.

BRÚJULA DE VARIACIONES.

La determinacion exacta de la declinacion es una operacion larga que exige un tiempo considerable para su ejecucion, en virtud de que se necesita repetir las determinaciones como se ha dicho, para poder estar seguros de que se han eliminado las distintas causas de error inherentes á los instrumentos usados, razon por la que en los observatorios ó en las estaciones magnéticas fijas, se determina el valor absoluto de la declinacion, periódicamente, con grandes intervalos de tiempo. En la determinacion de la declinacion, se emplea generalmente de una á dos horas, en cuyo intervalo la aguja ha sufrido variaciones apreciables en su direccion. De aquí resulta, que la declinacion obtenida, es la mé-

dia de los diferentes valores que en ese tiempo ha tenido y se trata de conocer en una investigacion delicada la magnitud de estas variaciones.

Para la prediccion del tiempo y para el estudio de la correlacion de los elementos meteorológicos con el magnetismo, importa sobre todo conocer las variaciones que sufre la declinacion, y se construyen instrumentos adecuados á este estudio. Describirémos la brújula construida por M. Eichiens.

Un instrumento destinado á acusar variaciones en la declinacion, debe ser mucho más sensible que los usados para la determinacion absoluta del valor de aquel elemento magnético.[1] Su disposicion demostrará cómo se ha conseguido satisfacer las condiciones de sensibilidad. El instrumento Eichiens representado en la figura 14, se compone de una caja de cobre que tiene dos de sus costados cerrados con vidrios y que está montada en un poste fijo. La caja en su parte superior lleva un tubo largo de cobre, terminado por un casquillo graduado que puede girar al derredor del eje del tubo. En el centro del casquillo se encuentra una cremallera que sirve para hacer subir ó bajar una pinza que lleva el hilo del que se suspende una larga barra imantada y que queda encerrada dentro de la caja de cobre. La barra se sujeta al hilo sirviéndose de un estribo que en su parte superior lleva un espejo plano, paraleio al eje de figura de la barra. La barra se encierra todavía en un anillo de cobre que deja libre el espejo, teniendo el anillo un espejo fijo. Sobre un segundo poste, colocado á una distancia del primero, variable con la aproximacion que se desee obtener, se encuentra montado un anteojo móvil en un plano vertical y que perpendicularmente á su eje óptico tiene una escala graduada en milímetros. Los rayos luminosos que parten de la regla dividida en milímetros llegan al espejo; allí se reflejan segun las reglas conocidas, de la reflexion y despues de reflejados entran á formar su imágen al centro del anteojo. Esta imágen está fija cuando el espejo tambien lo está. Cuando este último gira al derredor del hilo de suspension, la imágen girará un ángulo doble. La distancia de la regla al espejo, se calcula generalmente de manera que las divisiones en milímetros representen

1 En razon de ser muy pequeñas las cantidades que se trata de apreciar.

minutos de arco, para lo que basta colocarla á una distancia del espejo, de 1m.719.

Teniendo un milímetro por minuto de arco, con el poder amplificado del anteojo, pueden estimarse perfectamente décimos de minuto (6″).

Este instrumento está adecuado para acusar los más débiles movimientos de la aguja en un plano horizontal; determina las variaciones de la declinacion, sin que pueda dar su valor absoluto, á no ser que haya sido determinada la posicion de su cero.

Para que la aguja magnética acuse las más pequeñas variaciones de la declinacion, es necesario que esté dotada de una completa libertad en sus movimientos y que se reduzcan á un mínimum las perturbaciones debidas al medio en el que está suspendida la barra. Las causas que principalmente estorban la sensibilidad de la barra son: 1ª La torsion. 2ª Las corrientes de aire. 3ª Los cambios de temperatura. Para disminuir el efecto de la torsion, se adopta un hilo bastante largo preparado convenientemente. Para disminuir el de las corrientes de aire y atenuar los cambios bruscos de temperatura, se cubre todo el aparato, con una caja de una sustancia poco conductora.

Se sabe que la direccion de la fuerza magnética terrestre sufre variaciones, unas de gran período de tiempo y otras de corto; en cada localidad será conveniente determinar los puntos notables del período, es decir, los máximos, los mínimos y los puntos medios. Previo este conocimiento, el observador podrá juzgar cuáles son las horas, en las que debe disponerse para la observacion de la brújula de variaciones. Anotando las lecturas que en cada observacion vaya obteniendo, las diferencias sucesivas le darán las variaciones correspondientes á los intervalos de observacion.

Miéntras más disminuyan los intervalos de observacion, se llegará á conocer mejor el régimen magnético de cada localidad.

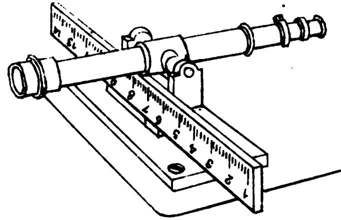


Fig. 14.

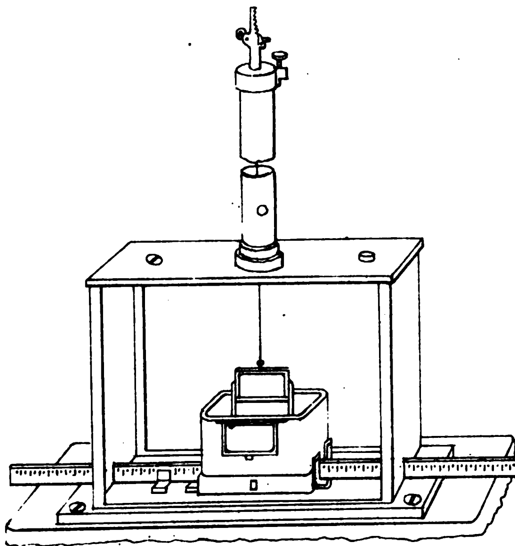


Fig. 14

CAPÍTULO V.

INCLINACION.

Colocada una aguja imantada en el plano del meridiano magnético, de manera que gire libremente al derredor de un eje horizontal, forma con el horizonte un ángulo llamado inclinacion.

Los instrumentos destinados á su medida deberán componerse esencialmente de una aguja imantada libre en un plano vertical, de una graduacion horizontal que permita conocer el azimut magnético del plano en el que se mueve la aguja, á fin de poder traerlo al meridiano; y por último, de una graduacion en un círculo vertical, paralelo al plano de la aguja, que dé el ángulo de ésta con el horizonte, es decir, la inclinacion.

Brújula comun de inclinacion.—La brújula comun consta de un círculo horizontal graduado y unido á un tripié con tornillos niveladores. Por el centro del círculo pasa un eje vertical, sobre el cual está fija una alidada provista de un vernier.

Este eje en su parte superior se une á los apoyos que sirven para sostener la aguja y que llevan un círculo vertical graduado. La aguja se monta generalmente, ó sobre chapas de ágata, ó de la misma manera que los ejes de las ruedas de los relojes; montadura que se adopta así para disminuir en lo posible el frotamiento. Paralelamente al círculo horizontal, tiene un nivel con los tornillos necesarios para su movimiento.

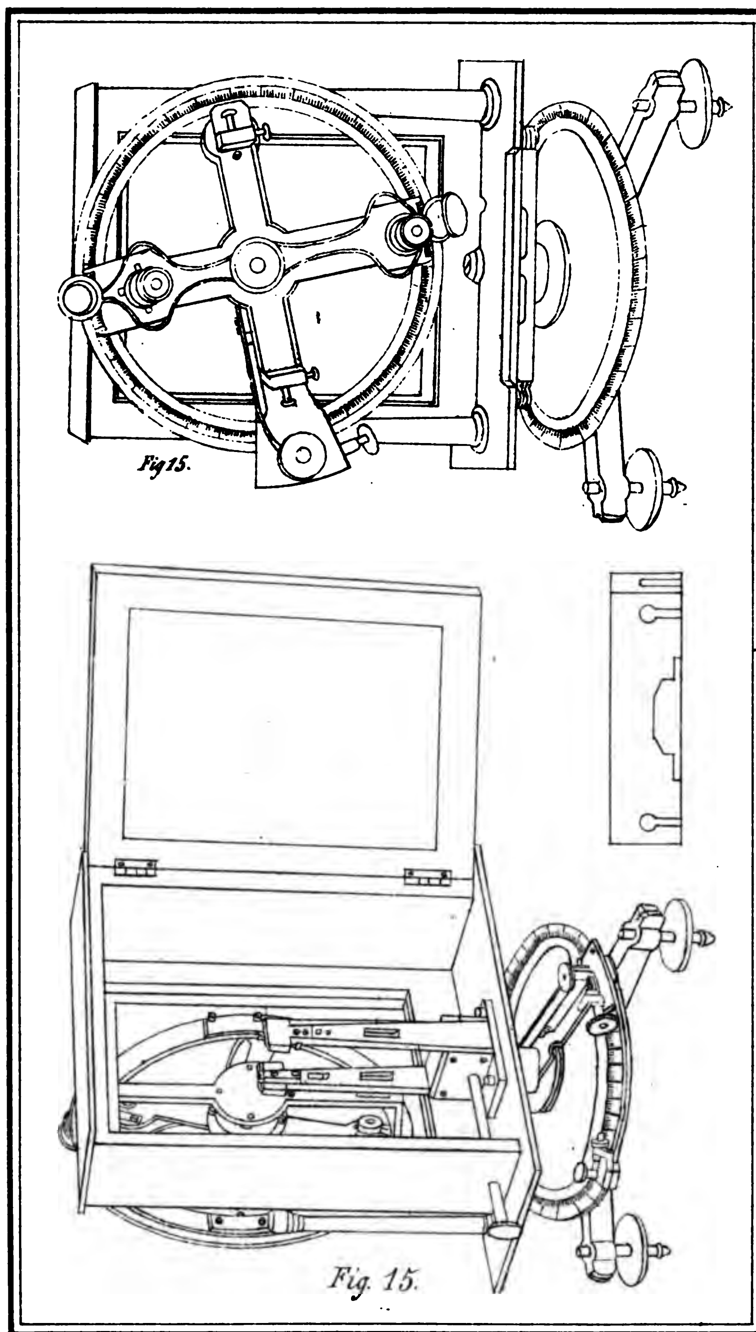
Manera de usar la brújula de inclinacion.—Se comienza por nivelar el instrumento, y en seguida se coloca la aguja sobre las chapas de ágata, fijándose en la cara que queda al círculo. Se hará girar en azimut hasta que la aguja se coloque en la graduacion que corresponde á la vertical; así se conseguirá tener la aguja de

un collar un disco con un vernier. Exteriormente á este disco va una corona horizontal graduada unida al tripié. La corona está graduada generalmente en cuadrantes, y el vernier permite aproximar 1'. En la parte superior del eje citado descansa una plataforma en la que se apoyan los montantes destinados á recibir la aguja, y una caja de madera con costados cubiertos por vidrios, que sirve para proteger á la aguja de las corrientes de aire. Sobre la referida plataforma y en un plano paralelo al de los montantes, se encuentran dos columnas en las que se ajusta con varios tornillos el círculo vertical graduado, que, con esta disposicion, queda enteramente separado de la aguja magnética, pero comprendido en un plano paralelo al de aquella. Darémos algunos detalles sobre los montantes, la caja, la aguja y el círculo.

Los montantes se componen de dos piezas de laton que terminan en su parte superior por dos prismas de ágata que no están invariablemente unidos á los montantes, sino que pueden sufrir movimientos en el sentido vertical, que se les comunican valiéndose de un juego de tornillos convenientemente colocado. Aplicados á las caras interiores de los montantes, se encuentran dos láminas de laton terminadas en su parte superior en VV, y que en su parte inferior reciben un movimiento ascendente que se les comunica por medio de un boton exterior á la caja, que obra sobre un excéntrico.

La parte superior de las láminas puede sufrir movimiento en un sentido vertical, lo que permite colocar la línea que une los vértices de las VV en un sentido horizontal. La caja que protege á la aguja imantada, y que cubre la plataforma descrita ya, tiene su cara posterior (la opuesta al círculo) cubierta con un vidrio despulido, que sirve para que la aguja pueda proyectarse con claridad. La aguja magnética, que es una lámina de acero de forma rombal, está atravesada en su centro de gravedad por un eje trabajado con esmero, cuyo eje descansa directamente sobre las aristas vivas de las ágatas. Una de las caras de la aguja lleva las marcas A y B en sus extremidades y un número de órden, pues regularmente cada brújula está dotada con un par de agujas.

Dijimos que el círculo vertical está sostenido por dos columnas solidarias á la plataforma: este círculo tiene en su parte central un eje sostenido por dos piezas metálicas que terminan en su cir-



LIT. DEL TIMBRE.


THE ASTOR LIBRARY
NY

cunferencia. En el eje central entra á frotamiento suave un collar que lleva dos alidadas, provista cada una de ellas de un vernier y un microscopio. Los microscopios que acabamos de citar tienen una retícula de un solo hilo, y los hilos de las retículas deben coincidir con un mismo diámetro del círculo. Estos microscopios se emplean para visar las puntas de la aguja y para bisectarlas con los hilos de las retículas.

Se consigue por medio de esta disposicion una grande exactitud en las visuales. Algunos fabricantes, en vez de poner un hilo en el foco de los microscopios, colocan una lámina de vidrio que tiene grabada una escala que sustituye á los verniers. Esta disposicion presenta la ventaja de que no hay que esperar á que la aguja se aquiete completamente y de que las lecturas pueden hacerse, desde que aquella ejecuta oscilaciones iguales á uno y otro lado de la division central de la escala.

En el eje central del círculo vertical entra otro collar que lleva dos piezas que en sus extremidades terminan en dos casquillos con lentes de corto foco, que se usan para leer la graduacion y los verniers. El círculo vertical está generalmente graduado en cuadrantes, y la graduacion parte de los dos extremos del diámetro horizontal. Se encuentran, además, en el instrumento los tornillos de presion y de aproximacion necesarios para los movimientos de las alidades, y un nivel paralelo al círculo horizontal.

MÉTODO DE OBSERVACION.

Al tratar de las condiciones que en su construccion debe satisfacer la brújula de inclinacion, enumeramos todas las causas de error de que es susceptible el instrumento, y aun indicamos ligeramente la manera de proceder, para que los resultados que con la brújula se obtuviesen, quedaran en lo posible exentos de dichas causas de error; insistiendo siempre en que, siendo la brújula de inclinacion comun un instrumento poco preciso, no seria conveniente aplicar aquel procedimiento indicado.

El modelo de Kew es de una construccion más delicada; la manera de visar las puntas de la aguja, la separacion del círculo ver-

tical, la mayor aproximacion y finura de las graduaciones, son otros tantos motivos que permiten esperar más exactitud en los resultados, y por lo mismo, emplear procedimientos más rigurosos.

Pasarémos á describir el método que se sigue con esta brújula para la determinacion de la inclinacion, fundándolo en todas sus partes.

Para proceder á aplicarlo es necesario efectuar previamente en la brújula las siguientes correcciones.

1º Corregir el nivel.

2º Hacer que las aristas vivas de las ágatas queden contenidas en un plano horizontal que pase por el centro del círculo vertical.

3º Que la línea que une los vértices de las quijadas en los que se monta la aguja, sea horizontal y pase por el centro del círculo vertical.

4º Que las dos retículas estén en línea recta y se confundan con la línea de los ceros de los verniers.

La correccion del nivel no presenta ninguna dificultad, no sucediendo lo mismo con las otras correcciones, pues son muy difíciles de hacer, y no hay ningun medio práctico que pueda aconsejarse, motivo por el cual los fabricantes ponen escrupulosa atencion en llenar todas las condiciones teóricas á que se refieren las correcciones enumeradas. En los observatorios ó estaciones en que se puede disponer de un catetómetro, se podrá con ayuda de este instrumento hacer todas las correcciones. En lo que sigue supondrémos que se han efectuado en parte, y el método de observacion que se va á dar, permitirá eliminar los pequeños errores que por la falta de completa correccion pueden quedar en la brújula.

Para observar la inclinacion se comenzará: 1º Nivelando cuidadosamente la brújula á fin de que el eje al derredor del cual gira el instrumento sea bien vertical. 2º Se colocará la aguja número 1 sobre las quijadas de laton, bajándolas poco á poco, á fin de que los pivotes de la aguja magnética descansen con suavidad sebre las chapas de ágata. 3º Se colocarán las alidadas de manera que se establezca la coincidencia entre los ceros de los verniers y las graduaciones correspondientes á la vertical, y en seguida se aprieta el tornillo de presion de la alidada del círculo verti-

cal; con el de aproximacion se concluye de establecer la coincidencia.

4° Moviendo azimutalmente la brújula se la lleva hasta un plano en el que la aguja se ponga vertical. Con el tornillo de aproximacion del movimiento azimutal se lleva la aguja hasta que sus dos puntas queden bisectadas por las retículas de los microscopios.

5º Se hace la lectura que señala el vernier del círculo horizontal. La brújula en esta posicion estará colocada en el primer vertical magnético; es decir, á 90° del plano meridiano magnético. Se espera á que se aquiete la aguja y entónces se llevan los microscopios á bisectar las puntas de aquella.

6º La aguja en esta posicion está colocada en la direccion de la fuerza total. El ángulo que señala es la inclinacion y bastará leer los verniers para tener su valor.

Si el instrumento con que hemos operado está perfectamente correcto, con sólo practicar todas las operaciones prescritas, tendriamos el valor exacto de la inclinacion, pero como suponemos incorrecta á la brújula de que nos hemos servido, veamos qué modificaciones deben hacerse al método general.

Clasifiquemos los errores que pueden quedar en la brújula de Kew:

1º Errores de la aguja.

2º Errores del goniómetro con que se va á medir el ángulo de inclinacion.

3º Errores de falta de coincidencia entre el vértice del ángulo de inclinacion y el centro del goniómetro.

Los errores propios de la aguja son los siguientes: 1º Falta de coincidencia entre el eje magnético y el de figura. 2º Que el centro de gravedad no coincida con el de suspension.

Los errores que puede tener el goniómetro son: 1º Excentricidad de la alidada que lleva los nonius. 2º Que la línea de las retículas no se confunda con la de los ceros de los nonius. 3º Que cuando la línea de las retículas sea horizontal, los verniers no señalen cero. Los errores que provienen de la aguja y del goniómetro, se reducen á uno sólo; excentricidad del vértice del ángulo de inclinacion.

El método que vamos á desarrollar, supone todos estos errores

reducidos á muy pequeñas magnitudes y es solamente aproximado. Pero en general será siempre conveniente aplicarlo, pues con él se toma por valor de la inclinacion, un promedio de determinaciones en las que hay el mismo número de valores de la inclinacion, erróneos en más y en ménos.

Supongamos una aguja cuyos ejes magnéticos y de figura no coincidan y cuyo centro de gravedad no esté sobre el de suspension.

Sea (Figura 16) H H el horizonte, A B la línea de los polos, Q Q el eje de figura, ω el ángulo que entre sí forman estas líneas, G el centro de gravedad, O el de suspension, a el ángulo formado por O G con Q Q y d la distancia O G, i la inclinacion obtenida. Si descomponemos la fuerza que obra en el plano en que está la aguja, sobre sus polos, en dos componentes, una vertical y otra horizontal, la aguja quedará sujeta á un sistema de dos fuerzas y para expresar su condicion de equilibrio bastará la siguiente ecuacion:

$$2\,l\,F_v \cos(i-\omega) + Pd\cos(i+a) - 2\,l\,F_h \operatorname{sen}(i-\omega) = O.$$

Cambiando la aguja de manera que su cara anterior pase á posterior, los ángulos ω y a cambiarán de signo, pero su valor no se alterará. En cuanto á la inclinacion que se obtenga con la aguja invertida, será distinta de la anterior y la designarémos con la letra i'.

La nueva ecuacion de equilibrio será:

$$2\,l\,F_v \cos(i'+\omega) + Pd\cos(i'-a) - 2\,l\,F_h \operatorname{sen}(i'+\omega) = O.$$

Sumando las ecuaciones y sustituyendo el valor de la suma de cosenos y senos en funcion de los arcos de la mitad, quedará finalmente:

$$2\,l\,F_v \cos\left(\frac{i+i'}{2}\right)\cos\left(\frac{i-i'}{2}-\omega\right) + Pd\cos\left(\frac{i+i'}{2}\right)\cos\left(\frac{i-i'}{2}-a\right) -$$

$$2\,l\,F_h \operatorname{sen}\left(\frac{i+i'}{2}\right)\cos\left(\frac{i+i'}{2}-\omega\right) = O.$$

Lam. 7ª

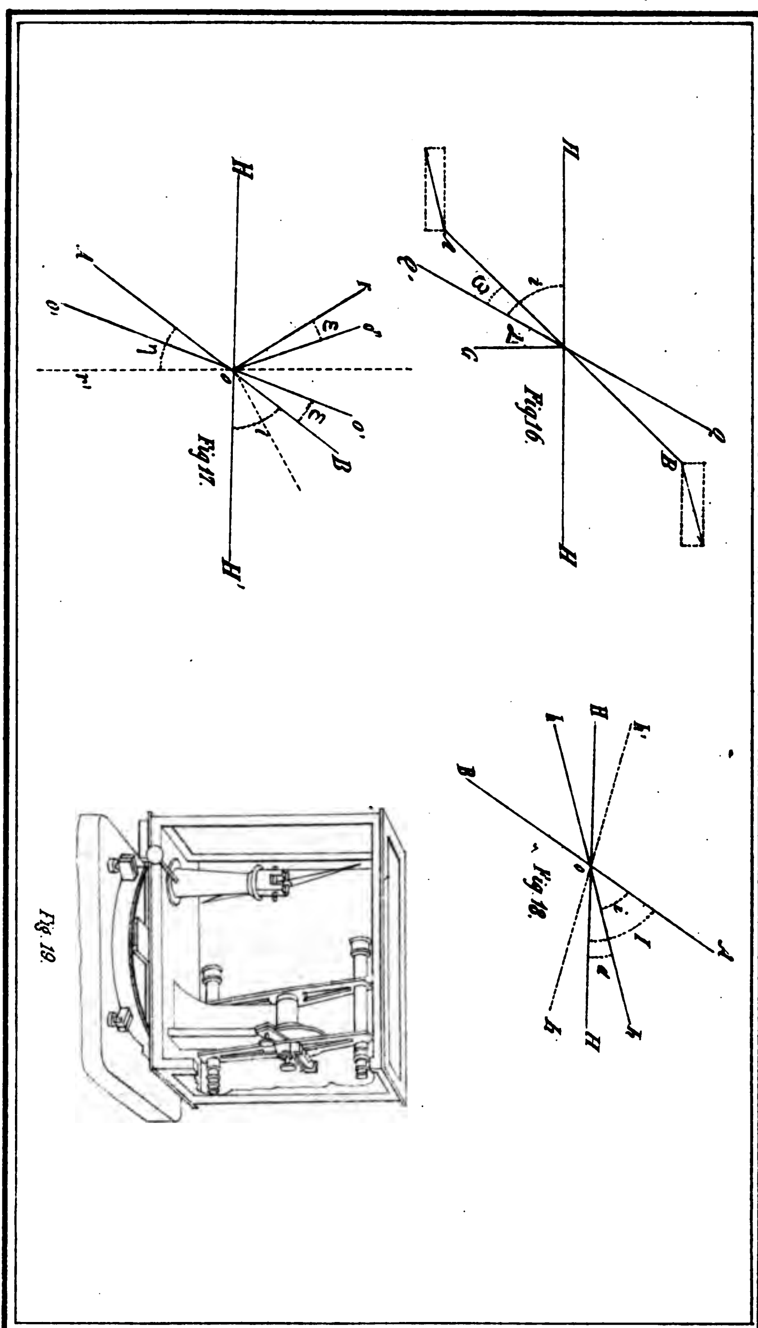
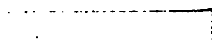


Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19.

LIT. DEL TIMBRE



Si como hemos supuesto al principio los ángulos ω y α son pequeños, los dos valores de la inclinacion que hemos obtenido invirtiendo las caras de la aguja diferirán muy poco y los arcos

$$\left(\frac{i-i'}{2}-\omega\right) \text{ y } \left(\frac{i-i'}{2}-\alpha\right)$$

serán cantidades muy pequeñas, de lo que resulta que sus cosenos serán sensiblemente iguales á la unidad. Bajo este supuesto, la ecuacion se convertirá en

$$2\,l\,F_v \cos\left(\frac{i+i'}{2}\right) + P\,d \cos\left(\frac{i+i'}{2}\right) - 2\,l\,F_h \text{ sen } \left(\frac{i+i'}{2}\right) = O \;(1)$$

Si comparamos esta última ecuacion con la que nos expresara el equilibrio de una aguja cuyos ejes magnético y de figura coincidieran, pero cuyo centro de gravedad en vez de estar sobre el centro de suspension estuviera sobre un punto de la línea comun de los ejes, obtendriamos

$$i'' = \frac{i+i'}{2} \;(3)$$

en virtud de que la ecuacion de equilibrio en estas últimas condiciones es:

$$2\,l\,F_v \cos i'' - 2\,l\,F_h \text{ sen } i'' + P\,d \cos i'' = O \;(2).$$

De esta comparacion resulta: que operando con una aguja incorrecta, pero tomando la inclinacion con sus dos caras, se llega á un resultado idéntico al que hubiéramos obtenido con una aguja cuyos ejes coincidieran, pero cuyo centro de gravedad no estaba sobre el de suspension. Es decir; de los dos errores inherentes á la aguja, uno de ellos se ha eliminado. Investiguemos si es posible lograr otro tanto con el segundo error. Podemos partir de la ecuacion (2) fundándonos en lo que acabamos de demostrar. Esta ecuacion supone que el centro de gravedad se encuen-

preciso llevar la retícula r á que se confunda con A B, ó lo que es igual, hasta que la línea O_2 se coloque simétricamente con O, respecto de A B y la inclinacion medida será $i - \varepsilon$ luego tendrémos:

$$i = \frac{i - \varepsilon + i + \varepsilon}{2}$$

Nos queda por estudiar el error que provenga de la falta de horizontalidad de la línea de los ceros, de la graduacion que queda eliminado con la operacion anterior.

Sea (Figura 18) H H′ la verdadera horizontal y h h la línea de los ceros, la inclinacion obtenida con la aguja A B será i en vez de I, es decir

$$I = i + a \quad (1)$$

Girando 180° el instrumento, la línea h h se colocará en h', h, y la inclinacion que se mida será

$$I + a = i' \quad (2)$$

Despejando á I entre las ecuaciones (1) y (2) tendrémos

$$I = \frac{i + i'}{2}$$

Para concluir el estudio del método de observacion que debe usarse con una brújula incorrecta, llevemos en cuenta el error que proviene de que el vértice del ángulo de inclinacion no esté sobre el centro del goniómetro con el que se va á medir; error que es de excentricidad y que se elimina tomando la semisuma de los ángulos de inclinacion observados con las dos puntas de la aguja.

En resúmen, para eliminar todos los errores que hemos considerado, debe procederse leyendo siempre los dos verniers, bisectando las dos puntas de la aguja con sus respectivos microsco-

pios, cambiando las caras de la aguja, girando 180° el instrumento, repitiendo las anteriores observaciones y por último ejecutando toda la serie anterior cuando se haya cambiado el sentido de la imantacion. Este procedimiento exige diez y seis determinaciones de la inclinacion, es decir, 32 lecturas puesto que se leen siempre los dos verniers. En una brújula que esté bien corregida y construida con esmero pueden reducirse á la mitad el número de observaciones, pues se puede suprimir la inversion de las caras de la aguja, en cada posicion conformándose únicamente con la inversion de la aguja, que resulta de girar en azimut 180° el instrumento. Al fin de estos apuntes se encontrarán diversos ejemplos de determinaciones del elemento magnético que hemos venido estudiando. Estos ejemplos enseñarán la forma de registro adecuada para cada caso.

Casi siempre cuando se observa la inclinacion con la brújula de Kew, se hace uso de dos agujas y se toma por valor de la inclinacion el promedio de los resultados obtenidos separadamente con cada una de ellas, con tal de que entre sí no difieran más de 5′.

BRÚJULA DE VARIACIONES EN INCLINACION.

Las mismas razones que expusimos al hablar de la declinacion y que obligan á que en los observatorios ó estaciones fijas se estudien constantemente las variaciones de los elementos magnéticos, ha hecho que se construyan instrumentos á propósito para seguir los movimientos de la aguja de inclinacion. Como las variaciones son pequeñas, la brújula que para su estudio usemos, debe tener condiciones de mayor sensibilidad que las anteriormente descritas. Además, siendo variable la posicion del meridiano magnético, puesto que este plano sufre los mismos cambios que la direccion de la declinacion, la brújula de variaciones en inclinacion debe estar provista de un buen círculo azimutal que permita ir colocando la aguja de inclinacion en las posiciones que sucesivamente vaya teniendo el meridiano magnético.

Pasamos á describir una brújula que para el objeto ha construido Brünner.

Es una verdadera brújula de inclinacion absoluta, (Figura 19) con excepcion de que la aguja está sostenida por una cuchilla semejante á la que tiene el fiel de una balanza de precision. La aguja magnética tiene la figura de rombo y está montada sobre un poste lejano del resto del instrumento. Dos largos microscopios sirven para visar las extremidades de la aguja; son móviles sobre un círculo graduado vertical que da directamente décimos de minuto. La alidada que llevan estos microscopios, puede tomar todas las inclinaciones que se quiera. Una vez colocada para medir la inclinacion, un nivel que tambien es móvil al derredor del mismo eje, se fija horizontalmente á las alidadas para usarlo como goniómetro.

El soporte de la aguja y el de los microscopios, estan fijos sobre una plata forma de bronce E móvil sobre un círculo graduado horizontal M sostenido por tres tornillos niveladores, pudiendo por lo tanto hacer seguir al plano de rotacion de la aguja todas las variaciones de la declinacion. Harémos notar que las variaciones diarias de la declinacion no tienen influencia sensible sobre el valor de la inclinacion observada, pues recordando la fórmula

$$\text{tang } I = \frac{\text{tang } I'}{\cos \alpha}$$

se verá que pequeñas variaciones en α no influencian á I de una manera sensible, siempre que α sea pequeño.

Para simplificar las lecturas, los microscopios están provistos en su foco de una lámina de vidrio graduada y cuyos intervalos valen un minuto de arco en la inclinacion de la aguja. Los décimos de minuto se valúan á la simple vista.

Por la ligera descripcion que acabamos de ver, se comprende que el nivel mide los pequeños ángulos de variaciones de la aguja, y por lo mismo el valor de sus divisiones, debe estar perfectamente determinado.

De acuerdo con la division que hemos hecho al comenzar á estudiar los instrumentos empleados para la determinacion de los elementos magnéticos, deberiamos describir á continuacion los que dan únicamente la intensidad de la fuerza. Pero esta mag-

nitud casi nunca se mide directamente, sino más bien se divide el problema segun lo vimos ya en el lugar respectivo.

Vamos á describir los instrumentos necesarios para obtener la componente horizontal, pues con ésta y la inclinacion, tendrémos la fuerza total.

El magnetómetro es el instrumento que generalmente se usa para conocer la componente horizontal, y verémos á continuacion una de las muchas disposiciones que se le ha dado.

CAPÍTULO VI.

MAGNETÓMETRO UNIFILAR.

El magnetómetro unifilar está destinado para la determinacion de la componente horizontal de la fuerza magnética terrestre y para la determinacion del valor absoluto de la declinacion.

La determinacion de la componente horizontal se obtiene, como ya dijimos, combinando las observaciones de desviacion y de oscilacion. Para el conocimiento de la declinacion es necesario medir el ángulo formado por los meridianos magnético y astronómico del lugar.

Por este análisis se comprende que el magnetómetro debe estar dispuesto esencialmente de manera que permita estas determinaciones, que es en efecto lo que se consigue dando al instrumento tres disposiciones distintas. Comenzarémos por describir el instrumento arreglado para las observaciones de desviacion.[1] (Figura 20.)

Las observaciones de desviacion exigen esencialmente una barra imantada que pueda moverse libremente en un plano horizontal; un iman colocado á una distancia conocida de la barra móvil, y que produzca sobre ella una desviacion; y una graduacion horizontal que permita medir el ángulo de desviacion. Va-

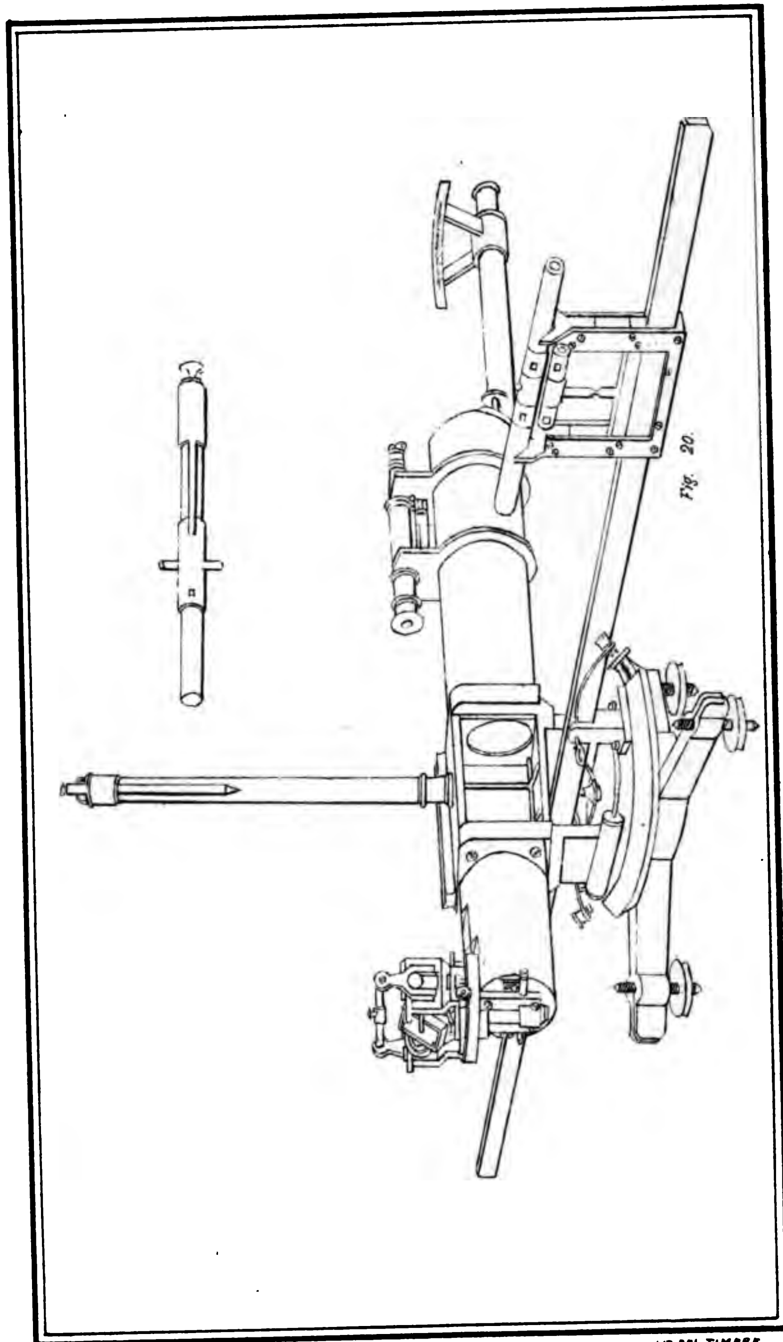
1 Algunos autores la llaman "deflexion."

mos á ir describiendo sintéticamente las partes de que consta el magnetómetro dispuesto para las desviaciones.

La barra magnética es un tubo cilíndrico de acero, montado en un estribo que lleva en su parte inferior un espejito, cuyo plano es perpendicular al eje de figura de la barra. La barra puede deslizarse á frotamiento duro sobre el estribo para destruir el efecto de la componente vertical, que obraria inclinándola tan luego como estuviera suspendida: tiene señalados varios círculos concéntricos, que sirven para indicar hasta dónde se ha corrido el estribo. El estribo que lleva á la barra tiene en su parte superior un tubito en el que entra una pequeña pieza cilíndrica, perforada trasversalmente, y que se fija al tubo del estribo por medio de un perno. La pequeña pieza cilíndrica se suspende de un hilo que no tenga torsion.[1] A fin de disminuir el efecto de la torsion es conveniente elegir un hilo muy fino; se usa generalmente el que resulta de unir varios hilitos del capullo de seda. El hilo, en su extremo superior, está sujeto á una cremallera metálica, lo que permite variar las alturas del iman suspendido. Esta cremallera está invariablemente unida á un casquillo de metal provisto de un índice, y que á su vez reposa sobre otro casquillo graduado, que remata un tubo de vidrio. El tubo de vidrio está atornillado en su parte inferior á una caja rectangular de cobre, en cuyo interior está la barra. Debajo de esta caja, y en una línea perpendicular á su longitud, se encuentran dos quijadas, por las que pasa una regla de laton graduada. Las quijadas sirven de directrices á la regla, y ésta se puede fijar á ellas por medio de unas clavijas. En la regla se desliza á frotamiento suave un carrito que tiene una línea de fe, que se puede hacer coincidir con cualquiera de las divisiones de la regla. El carrito, en su parte superior, se termina por dos quijadas, sobre las que se coloca el iman desviador. Por la disposicion anterior se comprende que este último iman puede quedar á distancia variable á uno y á otro lado del iman suspendido.

La caja rectangular citada ántes, está invariablemente unida al centro de un disco que lleva dos verniers, y que gira al derredor de un eje cónico, colocado en el centro de un segundo disco; gra-

1 Para evitar la torsion, el hilo debe ser tratado por el agua de jabon hirviente; en seguida tendido por un peso, y por último debe untarse de sebo.


Fig. 20.


THE ASTOR

duado este último se apoya sobre un tripié metálico que lleva tornillos niveladores. Paralelamente al limbo están dos niveles en ángulo recto.

El ángulo de desviacion es el formado por dos posiciones del eje magnético de la barra suspendida, correspondiendo la primera á la posicion que toma el eje magnético de dicha barra bajo la accion terrestre; y la segunda, á la que toma bajo la influencia del iman desviador y de la tierra. Se comprende que el instrumento debe tener una línea de referencia que acuse la posicion del iman en un momento dado. Aun estando dotado el magnetómetro de esa línea de referencia, habria que subsanar una nueva dificultad; pues es sabido que á la simple vista es casi imposible sobreponer dos líneas separadas y apreciar su coincidencia;[1] que esto sólo se consigue cuando se dirige una visual normal. Estos inconvenientes se evitan usando en vez de la simple vista un anteojo con retícula, y valiéndose de esta última para las coincidencias. En el magnetómetro se encuentra la siguiente disposicion: La caja rectangular de que hablamos, presenta en una de sus cabeceras una abertura circular cerrada por un vidrio plano, y en sus ángulos lleva atornillado un tubo cilíndrico en cuya extremidad libre se adapta un anteojo con retícula. El anteojo lleva encima, trasversalmente, un arco de marfil con una escala graduada, cuya imágen se refleja en el espejito que en su estribo tiene el iman, y en seguida va á formarse en el foco del anteojo.[2] El anteojo está ligeramente inclinado para que su eje óptico sea paralelo á la direccion de los rayos reflejos. Para evitar reflexiones nocivas, tanto la caja como el tubo en que se fija el anteojo están pintados exteriormente de negro.

La figura 20 muestra el magnetómetro dispuesto para la observacion de desviacion.

1 Pues se produce un efecto de paralaje.
2 Método Poggendorff.

DESCRIPCION DEL MAGNETÓMETRO DISPUESTO PARA LAS OBSERVACIONES DE OSCILACION.

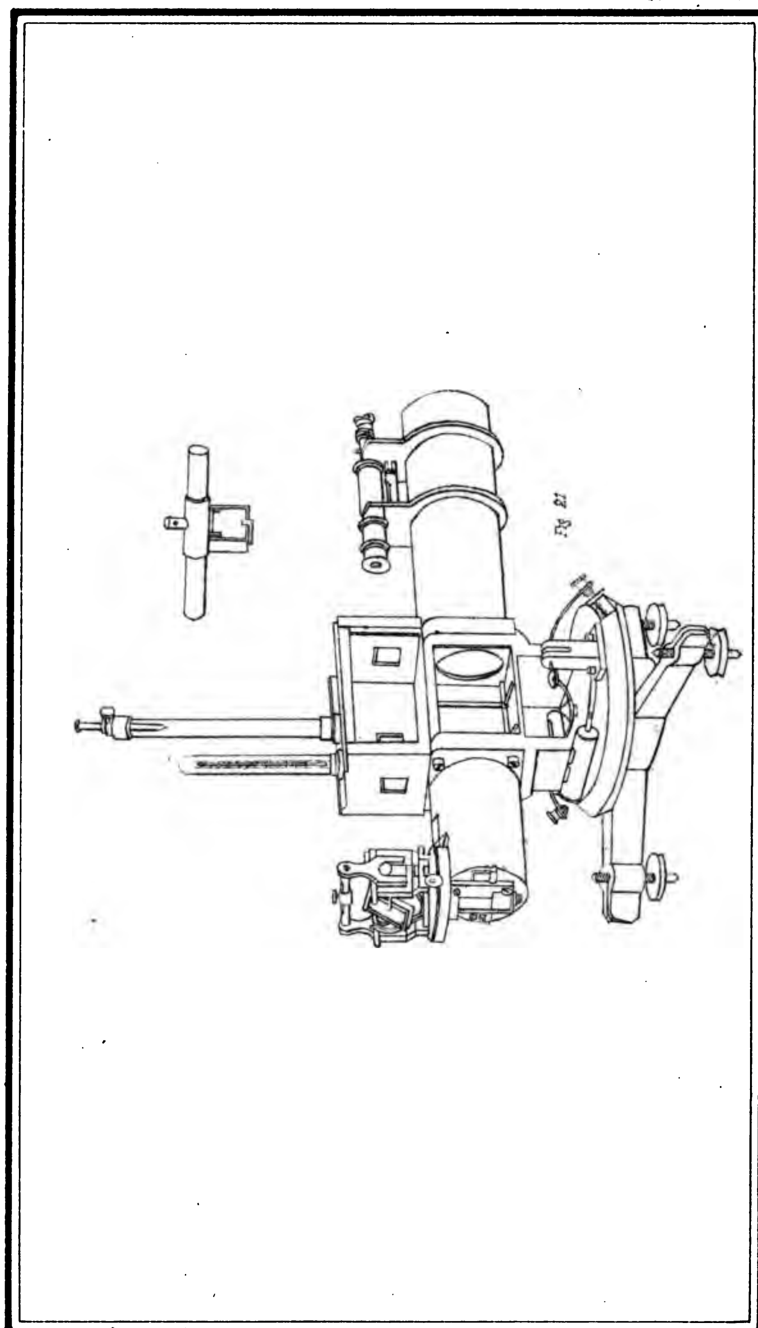
Estas observaciones (Figura 21) tienen por objeto determinar el tiempo que dura la oscilacion de un iman colocado en un plano horizontal bajo la influencia del magnetismo terrestre. Se comprende que para practicar las observaciones de oscilacion, necesitarémos esencialmente: una barra imantada suspendida de manera que pueda moverse libremente en un plano horizontal; un punto en la barra á que referir su oscilacion y un cronómetro que permita apreciar el tiempo que dura dicha oscilacion.

Se recordará que cuando se combinan observaciones de desviacion y oscilacion para determinar la componente horizontal de la fuerza magnética terrestre, se tiene que eliminar el momento magnético de la barra que produjo la desviacion, y que esto se consigue empleando esta misma barra en las dos clases de observaciones. Siguiendo el método sintético que estamos empleando para la descripcion del magnetómetro, veamos cómo está dispuesto para el estudio de las oscilaciones.

Se atornilla sobre la caja de cobre descrita ántes, otra de madera en cuyas cabeceras están practicadas dos ventanas opuestas. La caja está tapizada interiormente de negro y en sus costados tiene puertas corredizas. En su parte superior tiene dos roscas, una central que sirve para atornillar un tubo con apéndice de cremallera análogo al que nos sirvió en las observaciones de desviacion, pero un poco más largo; en la segunda rosca se coloca un tubo en cuyo interior está un termómetro. La barra se suspende de una manera idéntica á como se suspendió en las anteriores observaciones.

En las observaciones de desviacion es conveniente que la barra se ponga en equilibrio cuanto ántes. En las de oscilacion debe tratarse de producir el efecto contrario: de aquí el cambio de la caja de cobre[1] por la de madera. Como la torsion se disminuye

1 Desarrollándose corrientes de induccion en el cobre, obran sobre la aguja y disminuyen sus oscilaciones. Véanse las experiencias de Arago y de La Rive.



LIT. DEL TIMBRE.



con la longitud, debe emplearse un tubo más largo en las observaciones de oscilacion, que el que empleamos para la desviacion, pues es más temible la torsion en las primeras que en las últimas.

La barra desviadora es un anteojito colimador que tiene el cuerpo de acero imantado, y una de las extremidades de la barra lleva una lente objetiva, y en la otra, en el lugar correspondiente al foco del objetivo, se encuentra una laminita circular de cristal, graduada con dos escalas, una horizontal y otra vertical. Cualquiera de las divisiones centrales de la escala puede servir para medir la duracion de las oscilaciones. Para evitar los errores de paralaje, y para aumentar las imágenes de las dos escalas, se hace uso de un anteojo que se monta en dos quijadas que se encuentran en la parte superior del tubo que va atornillado á la caja de cobre. Este anteojo lleva un nivel cuyo eje es paralelo á su línea de colimacion. La figura adjunta representa el magnetómetro dispuesto para las observaciones de oscilacion.

DETERMINACION DE LA DECLINACION.

Disposicion del magnetómetro.—La declinacion es el azimut astronómico del meridiano magnético. Para determinarla, lo primero que se necesita conocer es la direccion del meridiano astronómico. Así es que el instrumento que se emplee en la determinacion de la declinacion, debe estar esencialmente dotado de un anteojo con el que se practiquen las observaciones necesarias para fijar una meridiana, y de una graduacion para conocer el azimut de la aguja puesta en equilibrio bajo la única accion de la tierra.

Para trazar una meridiana, se sabe que hay varios procedimientos, y que uno de los más sencillos es el que consiste en observar alturas iguales de sol. El magnetómetro dispuesto para las observaciones de oscilacion, tenia montado horizontalmente un telescopio que puede utilizarse para conocer la indicacion meridiana, pues aunque no tiene movimiento vertical, puede observarse por reflexion el sol, agregando un espejo plano colocado á cierta distancia del anteojo y quitando la caja de madera.

El espejo debe girar al derredor de dos ejes, uno horizontal y otro vertical; este último debe estar contenido en el plano vertical que pasa por la línea de colimacion del anteojo. Este plano vertical debe ser perpendicular al plano del espejo.

El magnetómetro, en la caja que se emplea para las observaciones de desviacion, en la cabecera opuesta á la que lleva el vidrio plano circular, tiene atornillado un contrapeso cilíndrico que lleva en su extremidad libre un pequeño círculo azimutal graduado, con un vernier y dos montantes que llevan el espejo de que ántes se habló. Para verificar la horizontalidad del eje se emplea un nivel montante, estando además dotado el instrumento de todos los mecanismos necesarios para sus rectificaciones. La figura representa el magnetómetro dispuesto para la determinacion del meridiano astronómico.

Condiciones de instalacion.—Para instalar debidamente el magnetómetro unifilar, debe tenerse presente la necesidad de satisfacer á varias condiciones, como son la estabilidad; que sufra las menores variaciones de temperatura y que quede completamente sustraido á las influencias de otros instrumentos magnéticos. En general es conveniente que los observatorios magnéticos se construyan léjos del centro de las grandes ciudades, puesto que la proximidad de edificios ó de las grandes masas de diferentes materias, producen pequeñas desviaciones. Tambien puede instalarse el magnetómetro en un departamento subterráneo, pues así se conseguirá poca vibracion y casi una temperatura uniforme; pero si no se puede construir un departamento subterráneo, debe procurarse una construccion baja y de una amplitud suficiente para que no se influencien recíprocamente los instrumentos allí colocados.

Una vez elegido el local, en su parte más adecuada se levantará un poste aislado enteramente del piso del departamento y cimentado á una profundidad suficiente, para que las vibraciones del suelo no se trasmitan al magnetómetro que debe colocarse sobre este poste. Desde el departamento magnético debe verse una señal meridiana, ó cualquiera otra cuyo azimut sea conocido.

Tanto en la construccion del departamento, como en su arreglo y detalles, deben evitarse hasta donde sea posible las materias ferruginosas.

Para expediciones rápidas, el magnetómetro debe montarse en su tripié procurando que éste quede firme y á cubierto de cualquiera de las causas de error ántes mencionadas.

OBSERVACIONES DE DESVIACION.

Para practicar las observaciones de desviacion se comienza por atornillar el anteojo que lleva la escala de marfil y por pasar en las quijadas la regla de laton, graduada. En la caja de cobre se atornilla el tubo de vidrio sin el casquillo que lleva la cremallera, y dispuesto así el instrumento, se nivela. Hechas las anteriores operaciones, se pasa en el tubo de vidrio el hilo que lleva la pieza cilíndrica en la que se fija el extremo de la barra imantada, teniendo cuidado de que el casquillo unido á la cremallera, descanse sobre el casquillo en que termina el tubo. Se fija á la piecesita cilíndrica citada, una plomada de bronce para quitar la torsion al hilo; á este fin es conveniente seguir el siguiente procedimiento: La plomada, en virtud de la fuerza de torsion, gira sobre sí misma un cierto número de veces; cuando el efecto de la torsion concluye, el hilo se enreda en sentido contrario en virtud de la inercia. Si se destruye esta última fuerza, se comprende, que, la plomada al destorcerse el hilo, quedará en reposo, lo que se consigue parándola delicadamente y con frecuencia. Una vez que esté en reposo, se ve si el perno que ha servido para fijarlo á la pieza en que termina el hilo, ha quedado perpendicular á los costados de la caja, lo que generalmente no se verificará. En este caso, se hace girar el casquillo que lleva la cremallera el ángulo necesario para que aquella condicion quede satisfecha. En esta operacion, es necesario atender á que una marca que tiene la pieza cilíndrica, quede del lado conveniente para fijar la barra imantada; pues sin esta precaucion se introducirá una torsion de 180° al hilo. En seguida se coloca la barra imantada y se mueve con la cremallera hasta que la imágen reflejada de la escala aparezca en el campo del anteojo; entónces se cierran los costados de la caja por medio de sus tapas corredizas.

Se hace pasar en la regla de laton el carrito, deteniéndolo á

una distancia cualquiera, generalmente de 0.^{m}30; sobre sus quijadas se monta el iman desviador. Se mueve azimutalmente el instrumento hasta conseguir que las oscilaciones ejecutadas por la barra suspendida, sean sensiblemente iguales á uno y otro lado de la division média de la escala, y se reduce la amplitud de las oscilaciones presentando á la barra un objeto ó sirviéndose del mecanismo que con ese fin tiene el instrumento. Por último, con el tornillo de aproximacion se consigue que la division média de la escala ejecute oscilaciones iguales y pequeñas á uno y otro lado de la retícula; se anota la graduacion azimutal leyendo los dos verniers. Se pasa despues el carrito con el iman desviador al otro lado de la caja en que está el iman suspendido y á una distancia igual á la primera, se hacen operaciones iguales. Despues se invierte la barra desviadora de manera que el polo que estaba al Este quede al Oeste y viceversa, volviéndose á repetir las mismas operaciones. Por último, se pasa otra vez el carro con el iman al otro lado de la regla (á su primitiva posicion) y se hacen operaciones idénticas.

Se toma el promedio de las lecturas correspondientes á las desviaciones que tuvieron lugar hácia el Oriente y de las del Occidente. La mitad de la diferencia entre estos dos promedios dará el ángulo de desviacion. Se verifica una nueva serie análoga á la anterior, y si los dos ángulos de desviacion obtenidos difieren á lo más la aproximacion del instrumento, la desviacion ha estado bien hecha; en caso contrario se repetirán las series hasta satisfacer esa condicion.

Como la fórmula empleada en las desviaciones contiene una constante que para su determinacion exige desviaciones á distintas distancias, se necesitará practicar las operaciones descritas á diferentes distancias.

Cuando se observa una desviacion, deben anotarse las temperaturas iniciales y finales y la hora de la observacion.[1]

Una vez conocido el ángulo de desviacion, que en la primera parte de estos apuntes hemos designado por α, se podrá calcular la relacion allí encontrada

1 El conocimiento de la hora es indispensable, pues como varía la intensidad del magnetismo terrestre, en las diferentes horas del dia, deben reducirse todas á una sola.

$$\frac{2\mu l}{f_h} = \tfrac{1}{2}\, d^3 \operatorname{sen} \alpha \left(1 - \frac{P}{d^2}\right)$$

siempre que se conozca á P, pues d es cantidad conocida, representa la distancia á que se ha colocado al iman desviador, contada en la regla. Para determinar á P hallamos la fórmula:

$$P = \frac{d'^3 \operatorname{sen} \alpha' - d^3 \operatorname{sen} \alpha}{d' \operatorname{sen} \alpha' - d \operatorname{sen} \alpha}$$

que nos da el valor de la constante en funcion de dos desviaciones observadas á distintas distancias.

Es conveniente advertir que aunque en teoría bastan dos desviaciones para obtener á P, deberán multiplicarse mucho más el número de desviaciones observadas, á fin de que la constante á que nos venimos refiriendo quede bien determinada, pues sólo variando mucho las circunstancias de la experimentacion, puede admitirse que el promedio de todos los valores observados se acerque á representar con alguna exactitud el valor de una cantidad que depende de otras varias. Regularmente en los Observatorios se practican series numerosas de observaciones de desviacion (de 100 á 300) para hallar la constante.

La mejor manera de proceder es la siguiente:

Al comenzar á servirse de un magnetómetro, practicar una serie numerosa de observaciones de desviacion, con el objeto de elegir entre todas ellas las que merezcan más confianza y combinarlas para la determinacion de P.

Conocida la relacion $\frac{2\mu l}{f_h}$ por medio de las desviaciones, necesitamos corregir el valor que la exprese por los efectos combinados de temperatura é induccion terrestre. Pues si hacemos oscilar un iman, sometiéndolo sucesivamente á diferentes temperaturas, y determinamos la duracion de la oscilacion correspondiente á cada temperatura, observarémos que ésta va aumentando á medida que crece la temperatura, lo que nos demuestra que el momento magnético del iman estudiado va disminuyendo, puesto que la duracion de las oscilaciones está en razon inversa de la raíz cuadrada del momento magnético del iman. Coulomb y otros físicos que han estudiado la influencia de la temperatura sobre las masas

magnéticas, experimentando como acabamos de indicar, han establecido dos fórmulas empíricas que ligan los momentos magnéticos de un mismo iman á diferentes temperaturas. Si llamamos m_t el momento magnético de un iman á t^o y $m_{t'}$, su momento á t'^o tendrémos las siguientes fórmulas:

$$(1)\ m_{t'} = m_t\,[1 - c\,(t' - t) - c'\,(t' - t)^2]$$
$$(2)\ m_{t'} = m_t\,[1 - c\,(t' - t)]$$

La fórmula (1) se aplica siempre que la diferencia de temperaturas á que se ha sujetado un iman sea mayor que 10°; la fórmula (2) se prefiere cuando la diferencia es menor que 10°. Estas fórmulas son las que sirven para reducir á una temperatura normal los momentos magnéticos; pero casi siempre es conveniente elegir la temperatura de 0° grados centígrados para las reducciones, y en este caso las fórmulas se convierten en:

$$(3)\ m_0 = m_t\,(1 + ct - c't^2)$$
$$(4)\ m_0 = m_t\,(1 + ct)$$

Las variaciones que sufren los momentos magnéticos á consecuencia de los cambios de temperatura, no son despreciables. En experiencias delicadas es indispensable efectuar las correcciones por temperatura que hemos indicado, á fin de que sean comparables las diversas determinaciones en las que ha servido una barra imantada. Los coeficientes c y c' varian de un iman á otro, y aun en el mismo si ha experimentado cambios en su espesor, en el temple del acero; siendo dignos de estudiarse los efectos que el calor produce en los imanes. Gaugain, investigando las variaciones que sufre la imantacion de una barra de acero cuando varía su temperatura, observó un fenómeno singular é inexplicado hasta la fecha, y es el siguiente: "Si se imanta una barra á la temperatura de 400° ó 500° y se deja enfriar, el magnetismo que conserva la barra á frio es inverso, es decir, ha cambiado el sentido de la imantacion. Si el iman se lleva de nuevo á la temperatura primitiva, recobra el primer sentido de la imantacion." Jamin y Van Rees han dado dos métodos para estudiar la distribucion del magnetismo en los imanes, aplicándolos puede conocerse la ley de dis-

tribucion y representarla analítica ó gráficamente. Pues bien, empleando los mismos métodos con imanes cuya temperatura va variando, se comprueba que la cantidad de magnetismo y la ordenada extrema de las curvas de distribucion, decrecen lentamente de 0° á 180° y rápidamente más allá de 190°; pero la conductibilidad magnética ó la forma de las curvas de distribucion es sensiblemente invariable. La relacion $\frac{2\,l\,\mu}{f_h}$ se convierte, teniendo en cuenta la correccion por temperatura en

$$\left(\frac{2\,\mu\,l}{f_h}\right)_1 = \frac{2\,\mu\,l}{f_h}\left(1 - \frac{P}{d^2}\right)\left[1 + c\,(t' - t)\right]$$

haciendo

$$\frac{2\,\mu\,l}{f_h} = \tfrac{1}{2}\,d^3 \operatorname{sen} a$$

que es la notacion generalmente usada; $\frac{2\,\mu\,l}{f_h}$ nos representa el primer valor aproximado de la relacion $\frac{2\,\mu\,l}{f_h}$, puesto que $\frac{P}{d^2}$ es una cantidad muy pequeña.

CORRECCION POR INDUCCION.

Es sabido que un iman colocado en un campo magnético cualquiera, sufre variaciones en su masa magnética, que provienen de la induccion del campo sobre el iman. Citarémos tres de las leyes de la induccion magnética:

1ª Todo magnetismo inducido, ó más bien, la mayor parte del desarrollado por campos magnéticos débiles, es temporal.

2ª El magnetismo temporal inducido aumenta siempre con la intensidad del campo magnético, y en límites bastante amplios *es sensiblemente proporcional á esta intensidad;* pero cuando la intensidad del campo aumenta indefinidamente, el magnetismo temporal inducido tiende hácia un límite finito y determinado.

3ª El magnetismo permanente no comienza á aparecer de una manera sensible, sino en un campo de intensidad notable, crece en seguida muy pronto, llega á un máximo, y en seguida decre-

ce. Como la tierra constituye un campo magnético uniforme y débil, el magnetismo de induccion que desarrolle sobre el iman desviador, *será proporcional á la intensidad del campo* y la masa magnética sufrirá un incremento representado por $A f_h$ para la unidad de masa, siempre que obre la fuerza en la misma direccion que el eje del iman y por $A f_h \mu \cos \beta$ para la masa de un iman de masa μ y que forme con la direccion de la fuerza del campo magnético un ángulo β.

En el caso del magnetómetro, la barra desviadora es perpendicular á la desviada, de manera que los ángulos que forman éstos con la línea N S, son complementarios, luego $\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$ y la expresion que nos da la masa magnética incrementada es:

$$A f_h \mu \operatorname{sen} \alpha.$$

La relacion del momento magnético á la componente horizontal quedará:

$$\left(\frac{2 l \mu}{f_h}\right)_2 = \frac{2 l (\mu + A f_h \operatorname{sen} \alpha \mu)}{f_h} \left(1 - \frac{P}{d^2}\right) \left(1 + c (t - t')\right)$$

$$\left(\frac{2 l \mu}{f_h}\right)_2 = \frac{2 l \mu}{f_h} \left(1 + f_h A \operatorname{sen} \alpha\right) \left(1 - \frac{P}{d^2}\right) \left(1 + c (t - t')\right)$$

$$\text{como } \frac{2 l \mu}{f_h} = \tfrac{1}{2} d^3 \operatorname{sen} \alpha \text{ tendrémos:}$$

$$f_h = \frac{4 \mu l}{d^3 \operatorname{sen} \alpha}$$

sustituyendo estos valores en la fórmula que da la relacion $\left(\frac{2 l \mu}{f_h}\right)_2$ tendrémos:

$$\left(\frac{2 l \mu}{f_h}\right)_2 = \tfrac{1}{2} d^3 \operatorname{sen} \alpha \left(1 + c (t - t') + \frac{2 A 2 \mu l}{d^3}\right) \left(1 - \frac{P}{d^2}\right)$$

$$\left(\frac{2 l \mu}{f_h}\right)_2 = \tfrac{1}{2} d^3 \operatorname{sen} \alpha \left(1 + c (t - t') + \frac{2 A 2 \mu l}{d^3} - \frac{P}{d^2}\right)$$

despreciando el producto de términos correctivos por ser de segundo órden.

Todos los términos de la fórmula anterior son conocidos con excepcion de $\frac{2 A \times 2 \mu l}{d^3}$. Veamos cómo podemos determinarlo.

Determinacion de $\frac{2 A \times 2 \mu l}{d^3}$.—Se monta el magnetómetro como para observaciones de oscilacion, sustituyendo al hilo de seda uno de cobre, cuyo diámetro nos sea perfectamente conocido; en seguida se le quita la torsion, se suspende la barra desviadora, se hace girar el casquillo que lleva la cremallera un ángulo ω hácia el E: la barra se moverá en el mismo sentido un ángulo, que se toma haciendo girar el magnetómetro hasta que la division média de la escala quede en coincidencia con el hilo vertical de la retícula, y se hacen las lecturas en los dos verniers. El ángulo de torsion será $\omega - \delta$, siendo δ el de desviacion de la aguja y la ecuacion de equilibrio:

$$(1)\ldots\ldots\ C(\omega - \delta) = 2 \mu l f_h (1 + A f_h \cos \delta) \operatorname{sen} \delta$$

Haciendo girar el casquillo un ángulo ω' en sentido contrario la aguja se desviará igualmente un ángulo δ' y por analogía

$$(2)\ldots\ldots\ C(\omega' - \delta') = 2 \mu l f_h (1 + A f_h \cos \delta') \operatorname{sen} \delta'$$

En seguida se hace girar el magnetómetro 180° y el casquillo superior un ángulo ω'' suficiente para que el extremo de la aguja que estaba al N quede al S, y recíprocamente, teniendo cuidado de que el que queda al N se desvie hácia el E un ángulo δ''; despues se hace variar la torsion, para que el extremo que está hácia el E quede al W. Las ecuaciones de equilibrio en estas dos últimas posiciones serán:

$$(3)\ldots\ldots\ C(\omega'' - \delta'') = 2 \mu l f_h (1 - A f_h \cos \delta'') \operatorname{sen} \delta''$$

$$(4)\ldots\ldots\ C(\omega'''-\delta''') = 2\mu l f_h (1 - A f_h \cos \delta''') \operatorname{sen} \delta'''$$

En las ecuaciones (3) y (4), el valor de $A f_h$ por el coseno del ángulo de desviacion es negativo, pues el magnetismo desarrollado por la induccion terrestre, tiende á producir polos de nombre contrario á los del iman.

Sumando respectivamente las ecuaciones (1) y (2) y las (3) y (4) resulta:

$$(5)\ldots\ldots\ C[\omega+\omega'-\delta-\delta']=2\mu l f_h$$
$$[(1+A f_h \cos \delta) \operatorname{sen} \delta+(1+A f_h \cos \delta') \operatorname{sen} \delta']$$

$$(6)\ldots\ldots\ C[\omega''+\omega'''-\delta''-\delta''']=2\mu l f_h$$
$$[(1-A f_h \cos \delta'') \operatorname{sen} \delta''+(1-A f_h \cos \delta''') \operatorname{sen} \delta''']$$

Dividiendo la (5) entre la (6)

$$\frac{\omega+\omega'-\delta-\delta'}{\omega''+\omega'''-\delta''-\delta'''} =$$
$$\frac{\operatorname{sen} \delta+\operatorname{sen} \delta'+A f_h (\cos \delta \operatorname{sen} \delta+\cos \delta' \operatorname{sen} \delta')}{\operatorname{sen} \delta''+\operatorname{sen} \delta'''-A f_h (\cos \delta'' \operatorname{sen} \delta''+\cos \delta''' \operatorname{sen} \delta''')}$$

Haciendo para simplificar la escritura el numerador del primer miembro igual con a, el denominador con a', sen δ+sen $\delta=b$, sen δ''+sen $\delta'''=b'$ y los factores de $A f_h$ iguales con c y c' respectivamente tendrémos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b + A f_h c}{b' - A f_h c'}$$

$$\text{De donde } A f_h = \frac{ab' - a'b}{ac'+a'c} = G\ldots\ldots\ (7)$$

Una vez determinado el valor de $A f_h$ para obtener el de

bastará combinar la ecuacion (7) con

$$\frac{2\mu l}{f_h} = \tfrac{1}{2} d^3 \operatorname{sen} \alpha$$

resultando:

$$\frac{2A \times 2\mu l}{d^3} = G \operatorname{sen} \alpha$$

OBSERVACIONES DE OSCILACION.

Conocida ya la disposicion que se da al magnetómetro para ejecutar con él las observaciones de oscilacion, réstanos describirlas y estudiar las correcciones que deben hacerse al dato observado para obtener el producto $2\, l\, \mu\, f_h$. Principiarémos por algunas correcciones instrumentales.

Como generalmente la retícula del anteojo de que vamos á servirnos tendrá un error de colimacion, se comenzará por destruirlo; á este fin es conveniente quitar el espejito plano que se usa para la determinacion de la meridiana astronómica, desmontar la caja de madera y el tubo de vidrio, de manera que en la parte superior del magnetómetro quede únicamente el telescopio, sin que ningun objeto estorbe las visuales; en seguida se establece la coincidencia entre el centro de la retícula y un punto lejano y bien definido,[1] y se hace girar el telescopio 180° al rededor de su eje de figura; si hay error de colimacion, el centro de la retícula quedará fuera del punto visado, y el error será igual á la mitad de la distancia entre la imágen del punto y el centro de la retícula. Para conseguirlo se llevará el centro á coincidir de nuevo con el punto, ejecutando este movimiento por partes iguales con los tornillos de la retícula y con el de aproximacion del círculo azimutal. Procediendo así se ha conseguido que el plano vertical que pasa por el eje óptico del telescopio contenga la línea de colimacion; para lograr que se confunda con él, se hará girar el anteojo 90° al rededor de su eje de figura, y en esta posicion se repetirán las operaciones anteriores.

1 El punto debe encontrarse en la proximidad del horizonte, pues se recordará que el anteojo no tiene movimiento vertical. Puede emplearse con éxito un colimador.

Correcta la línea de colimacion, procederémos á establecer su paralelismo con el eje del nivel: se lleva el telescopio y el nivel en la direccion de uno de los tornillos del tripié,[1] y sirviéndose de él se lleva la burbuja al medio; en seguida se invierte el telescopio sobre sus apoyos, y si la burbuja se desvía del centro, se vuelve á llevar á él por medio de los tornillos del nivel y del tornillo del pié, efectuando estos movimientos por partes iguales: despues de repetir varias veces esta operacion, el eje del nivel quedará paralelo á la línea de colimacion, lo que se conocerá en que la burbuja permanece en el centro del tubo en sus dos posiciones. Efectuada esta correccion tendrémos horizontal la línea de colimacion, al ménos en esa direccion; se aprieta en seguida el tornillo de presion del movimiento azimutal, y se suspende la barra imantada, la que, solicitada por la fuerza terrestre, comenzará á ejecutar una serie de oscilaciones á uno y otro lado de su posicion de equilibrio.

Como se recordará, esta barra puede correr sobre un estribo, y es necesario nivelarla en él á fin de destruir el efecto de la componente vertical; pues bien, como la visual dirigida por el telescopio en la posicion considerada es horizontal, se resbalará el iman en su estribo hasta que el hilo horizontal de la retícula coincida con un punto cualquiera de la escala vertical, durante toda una oscilacion. Cuando se tenga nivelado el iman se aprietan fuertemente los tornillos que lo fijan al estribo, á fin de que quede inmóvil en él; pues sólo habrá que variar su posicion cuando haya un cambio considerable en la posicion geográfica de los lugares en que se trabaja. Seguros ya de que las oscilaciones que ejecute el iman estarán contenidas en un plano horizontal, se procede á hacer las observaciones de oscilacion, de la manera siguiente:

1ª Se monta el instrumento para oscilaciones, como se dijo, y se nivela.

2ª Se lleva el instrumento al meridiano magnético ó muy próximo á él, y se suspende del hilo la plomada, á fin de quitar la torsion, operando de una manera análoga á la ya prevenida al hablar de las observaciones de desviacion.

1 El tornillo se pone en una direccion muy próxima á la del meridiano magnético.

3ª Se suspende la barra imantada, y por medio de la cremallera que remata el tubo de vidrio, se le hace subir ó bajar, hasta que la escala grabada en una de las lentes del iman, aparezca con claridad en el campo del anteojo y sea paralela á la línea horizontal de la retícula.

4ª Se cierran los costados de la caja, y se mueve todo el instrumento en azimut, hasta que la division média de la escala quede cubierta por el hilo vertical de la retícula, si el iman está en reposo; ó hasta que ejecute oscilaciones iguales á uno y otro lado de este hilo, si está moviéndose; y se aprieta el tornillo de presion que fija al magnetómetro. En seguida, si el arco de oscilacion es muy pequeño, se aproxima un objeto de acero, á fin de que el iman extienda sus oscilaciones á un arco de un grado de amplitud, y se procede á determinar el tiempo que dura una oscilacion. Recordemos que se entiende por duracion de la oscilacion el intervalo de tiempo que emplea el iman para que un mismo punto de su escala pase dos veces consecutivas en sentido contrario por el hilo vertical de la retícula. Para el conocimiento del tiempo de una oscilacion, se necesita el concurso de dos observadores: uno que cuente el cronómetro y otro que observe las oscilaciones del iman. Este último se coloca viendo por el telescopio, y da un *hop* en el momento preciso, en el que pasando el iman del Este al Oeste, se ha verificado la coincidencia entre la division média de la escala y el hilo vertical de la retícula. El contador del cronómetro anotará la hora, minutos, segundos y fracciones de segundo,[1] correspondientes al *hop* del observador; este último seguirá contando en silencio cinco pasos consecutivos, y en el mismo sentido de la division média de la escala por el hilo vertical de la retícula, es decir, diez oscilaciones. Antes que el paso 50 se verifique dará la voz *atencion* al contador del cronómetro, y en el instante en que aquel se verifique dará el *hop*. El contador anotará este segundo tiempo. Se continúa procediendo de la misma manera para los tiempos de los pasos décimo, décimoquinto, vigésimo, etc., hasta el quincuagésimo, correspondientes á 20, 30, 40, 50, 100, etc. Puede entónces separarse el observador del magnetó-

1 Si en la estacion en la que se opera pudiera disponerse de un cronógrafo, bastaria un solo observador, y el resultado se independeria de la ecuacion personal del contador.

metro, y el contador tomará la diferencia entre los tiempos correspondientes al paso quincuagésimo y el paso cero, con esta diferencia, fundándose en la ley del isocronismo de las oscilaciones, el tiempo correspondiente á la oscilacion 300, y conocido que sea, el observador se colocará oportunamente para ver dicho paso y dar el *hop* correspondiente, que anotará el contador.

5ª Para no exponerse á perder el tiempo del paso, se calculará tambien aproximadamente la duracion de una oscilacion simple, y una vez conocido, bastará que el observador se encuentre completamente listo, con una acticipacion igual á la duracion calculada. Este último paso servirá de orígen para una nueva serie de observaciones idéntica á la primera.[1] Por comprobacion, las diferencias entre los tiempos calculados á que debe verificarse una oscilacion cualquiera de la segunda serie y los anotados por la observacion directa, deben diferir muy poco.

6ª Restando los tiempos de las oscilaciones que tengan 300 de intervalo, es decir, el de la 300 del de la de cero, el de la 310 del de la 10, etc., etc., y dividiendo éstas diferencias por 300, se tendrá 11 valores de la duracion de una oscilacion simple, que cuando más diferirán en los milésimos de segundo. El término medio de estos 11 tiempos dará la duracion buscada.

7ª El observador tendrá cuidado de anotar la amplitud de los arcos de oscilacion al principio y al fin de cada serie, valuándolos en divisiones de la escala, y de anotar las temperaturas que señale el termómetro unido á la caja de oscilacion.

Las correcciones de que hablamos al describir el magnetómetro tienen por objete preparar el instrumento conveniente para poder usarlo; las que á continuacion expresarémos llevan la mira de corregir el dato suministrado por la observacion. En virtud de que la fórmula de que nos hemos servido supone que el tiempo se ha determinado con un cronómetro perfecto, que el arco de oscilacion no tiene amplitud, que la fuerza que produce este movimiento es únicamente la terrestre y por último, que la masa del iman permanece constante.

1ª *Correccion por la marcha del cronómetro.*—Por más cuidado

1 Se multiplica la serie de oscilaciones para reducir considerablemente los errores inherentes á los observadores; cuando estos sean prácticos, podrá reducirse el número de series.

y esmero que se ponga en la construccion de un cronómetro, no es posible que marche de una manera uniforme, sino que siempre sufre adelantos ó retardos que es necesario conocer. Con este fin se determinará la hora cada tres ó cuatro dias por medio de observaciones astronómicas y comparándola con la que marca el cronómetro se tendrá su correccion, que será positiva ó negativa, segun que el tiempo observado sea mayor que el cronométrico ó recíprocamente. Despues de algun tiempo, se hará otra determicion de hora para conocer la correccion del cronómetro que en general diferirá de la obtenida anteriormente. Esa diferencia es lo que se llama la marcha del cronómetro en el número de horas comprendido entre las dos observaciones. De aquí se deducirá la marcha por segundo, ó lo que es lo mismo, cuanto tiempo es mayor ó menor el segundo marcado por el cronómetro de lo que debiera ser. Por tanto, al tiempo t empleado en una oscilacion deberá agregarse ó quitarse la marcha del cronómetro proporcionalmente á t; de suerte que si $\pm m$ es la marcha, el tiempo corregido será: $t_1 = t \pm mt$.

2ª *Correccion por el arco de oscilacion.*—La fórmula que nos da la duracion de una oscilacion, supone que su amplitud es infinitamente pequeña; cuando ésta tiene algun valor finito, la duracion de la oscilacion no es independiente de la amplitud del arco, y la fórmula que las liga es una serie de la que no tomamos sino hasta el segundo término, por ser bastante convergente.

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma\, m\, r^2}{2\, \mu\, l f_h}}\ (1 + \tfrac{1}{4}\ \text{sen}\ \frac{2'}{2}\ \theta)$$

siendo θ la amplitud del arco de oscilacion.

La fórmula anterior podemos ponerla bajo la forma siguiente:

$$t_1 = t_2\ (1 + \tfrac{1}{4}\ \text{sen}\ \frac{2'}{2}\ \theta) \ldots\ldots (1)$$

en la que t_1 representa el tiempo (corregido por la marcha del cronómetro) empleado en la oscilacion de un arco cuya amplitud es θ, y $\frac{t}{2}$ el tiempo que emplearía en hacer una oscilacion cuya amplitud fuera infinitamente pequeña.

Se ve desde luego que la fórmula liga tres cantidades y que conociendo dos de ellas podemos determinar la tercera.

En nuestro caso conocemos la duracion de una oscilacion de amplitud sensible y podemos llegar á determinar un valor de θ correspondiente á la oscilacion média de la serie; por consiguiente, estamos en aptitud de encontrar el tiempo de una oscilacion infinitamente pequeña en amplitud y conociendo esto tiempo podemos aplicar la fórmula del péndulo que hemos usado en estos apuntes.

Despejando en la fórmula (1) á t_2 resulta:

$$t_2 = \frac{t_1}{1+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}$$

Como el arco de oscilacion es muy pequeño, podrémos tomar el arco por el seno y pasar el denominador al numerador, desarrollando el binomio hasta los términos de segundo grado, quedando:

$$t_2 = t_1\left(1 - \frac{1}{16}\theta^2\right)$$

Como

$$t_1 = t\,(1+m)$$

$$t_2 = t\,(1+m)\left(1-\frac{1}{16}\theta^2\right)\ldots\ldots\ (2)$$

No siendo constante el arco de oscilacion sino que decrece, habrá que tomar por valor de θ el arco correspondiente á la oscilacion média de la serie, que no es el promedio de los arcos inicial y final; pues la amplitud del arco de oscilacion decrece en progresion geométrica.

La determinacion de θ no será otra cosa que buscar el término medio de una progresion geométrica, cuyo primero y último términos son conocidos.

Un término cualquiera de una progresion geométrica está dado por la fórmula $\theta = ax^n$, en la que θ representa el tiempo co-

rrespondiente á la $n + 1$ oscilacion y el último término en funcion del primero es $a' = ax^{2n}$, siendo $2n + 1$ el número total de términos. Elevando al cuadrado la primera y despejando á x^{2n} en la segunda, despues de sustituirlo en la primera queda $\theta^2 = a\,a'$, fórmula que nos da el valor de una oscilacion cercana á la média de la serie en funcion de la primera y última. Sustituyendo el valor de θ^2 en la fórmula (2) se obtiene:

$$t_2 = t\,(1 + m)\,(1 - \frac{a\,a'}{16})$$

que todavía es susceptible de simplificarse, pues el producto de m por $\frac{a\,a'}{16}$ da un término correctivo de segundo órden y la fórmula podrá escribirse

$$t_2 = t\,(1 + m - \frac{a\,a'}{16})$$

3ª *Correccion por la torsion del hilo.*—Las dos correcciones anteriores nos ponen en aptitud de poder usar la fórmula

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma\, m\, r^2}{2\,\mu\, l\, f_h}};$$

pero en el presente caso á la fuerza terrestre viene á añadirse la fuerza de torsion y la fuerza aceleratriz no será solamente $2\,\mu\, l\, f_h$, sino que estará aumentada por el coeficiente de torsion; en consecuencia, la duracion de las oscilaciones observadas, corregidas previamente por el arco de oscilacion y marcha del cronómetro, estará representada por la expresion:

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{\Sigma\, m\, r^2}{2\,\mu\, l\, f_h + C}}$$

Elevando al cuadrado:

$$(3) \ldots\ldots\ldots \; t_2^2 = \frac{\pi^2 \Sigma m r^2}{2 \mu l f_h + C}$$

Si no hubiera torsion, la duracion de una oscilacion estaria representada por

$$(4) \ldots\ldots\ldots \; t_3^2 = \frac{\pi^2 \Sigma m r^2}{2 \mu l f_h}$$

Dividiendo la (3) entre la (4) y despejando á t_3^2

$$t_3^2 = \frac{t_2^2 (2 \mu l f_h + C)}{2 \mu l f_h}$$

$$t_3^2 = t_2^2 \left(1 + \frac{C}{2 \mu l f_h}\right) \ldots\ldots\ldots (5)$$

En esta fórmula todo nos es conocido con excepcion de $\frac{C}{2 \mu l f_h}$

Determinacion de $\frac{C}{2 \mu l f_h}$.—Dispuesto el magnetómetro como para las observaciones de oscilacion, se hace girar el casquillo superior que remata el tubo de vidrio 90° en el sentido en que crece la graduacion y se lee la indicacion de la escala del iman que se encuentra en coincidencia con el hilo vertical de la retícula, anotando esta lectura se hace girar de nuevo el casquillo 180° en sentido contrario y se lee la indicacion de la aguja en esta nueva posicion de equilibrio.

Sea τ la torsion que tenga el hilo al comenzar la operacion y ψ el ángulo de desviacion de la aguja por causa de esta torsion. Haciendo girar 90° el casquillo, el hilo tendrá una torsion igual á $90° \pm \tau - \beta$, siendo β la variacion del ángulo de desviacion

por efecto de la revolucion de 90° comunicada al casquillo. El iman se encontrará en equilibrio por la accion del par de torsion y por la del par componente horizontal: la ecuacion que exprese la posicion de equilibrio será:

$$C\,(90° \pm \tau - \beta) = 2\,\mu\,l\,f_h \text{ sen } (\pm \psi + \beta)$$

Al efectuar la revolucion de 180° en sentido contrario, la ecuacion quedará.

$$C\,(90° \mp \tau - \beta') = 2\,\mu\,l\,f_h \text{ sen } (\mp \psi + \beta')$$

en la que τ y ψ son de signo contrario á la anterior en razon de que su efecto es opuesto.

Sumando las ecuaciones anteriores tendrémos

$$C\,[180° - (\beta + \beta')] = 2\,\mu\,l\,f_h\,(\beta + \beta')$$

tomando los arcos en lugar de los senos por ser éstos demasiado pequeños.

De donde se obtiene

$$\frac{C}{2\,\mu\,l\,f_h} = \frac{\beta + \beta'}{180° - (\beta + \beta')}$$

Sustituyendo este valor en la (5) resulta:

$$t^2_3 = t^2_2 \left(1 + \frac{\beta + \beta'}{180° - (\beta + \beta')} \right) \text{.........} \quad (6)$$

fórmula que nos da el valor de la oscilacion corregido por torsion.

4ª *Correccion por induccion.*—Hasta ahora hemos supuesto que la masa magnética no haya sufrido ningun cambio; pero esto no se verifica, puesto que el iman está en un campo magnético y por tanto la barra experimenta efectos de induccion. Su masa, que era μ se convertirá en $\mu + A\,\mu f_h \cos\,\theta$; pero como el arco θ es muy pequeño, podemos tomar por coseno θ la unidad y quedará:

$$\mu + A\,\mu f_h$$

Segun hemos visto, $A f_h = G$ que sustituido en la expresion anterior se tendrá:

$$\mu\,(1 + G)$$

La fórmula (3) deberá pues modificarse, quedando:

$$t_3^2 = \frac{\pi^2\,\Sigma\,m\,r^2}{2\,\mu\,l f_h\,(1 + G)} \quad \cdots\cdots\cdots (7)$$

y t_4^2, si la masa no variara tendria por valor

$$t_4^2 = \frac{\pi^2\,\Sigma\,m\,r^2}{2\,\mu\,l f_h}$$

Haciendo las mismas operaciones que en la correccion anterior resulta:

$$t_4^2 = t_3^2\,(1 + G)$$

$$\text{y como } t_3^2 = t_2^2\left(1 + \frac{\beta + \beta'}{180 - (\beta + \beta')}\right)$$

$$t_4^2 = t_2^2\left(1 + G + \frac{\beta + \beta'}{180 - (\beta + \beta')}\right)$$

despreciando los términos de segundo órden.

5ª *Correccion por temperatura.*—De una manera análoga se hace la correccion por temperatura, quedando el valor de

$$t_5^2 = t_2^2 \left(1 + G + \frac{\beta + \beta'}{180 - (\beta + \beta')} + c'(t - t')\right)$$

Sustituyendo el valor de t_2^2 resulta:

$$t_5^2 = t^2 \left(1 + m - \frac{a\,a'}{16}\right)^2 \left(1 + G + \frac{\beta + \beta'}{180 - (\beta + \beta')} + c(t - t')\right)$$

la duracion t_5^2 es la que obtendriamos con un péndulo ideal.

Despejando á $2\,\mu\,l\,f_h$ dará:

$$2\,\mu\,l\,f_h = \frac{\pi^2\,\Sigma\,m\,r^2}{t^2\left(1 + m - \frac{aa'}{16}\right)^2\left(1 + G + \frac{\beta + \beta'}{180 - (\beta + \beta')} + c(t - t')\right)}$$

Tal es la fórmula que nos da el producto del momento del iman por la componente horizontal del par magnético terrestre en funcion del tiempo observado.

MANERA DE DETERMINAR LA DECLINACION.

En los observatorios fijos debe tenerse una señal meridiana ó una cuyo azimut astronómico se haya determinado previamente por los procedimientos más rigurosos que enseña la astronomía.

Si se opera en el campo ó en una estacion provisional en que no se pueda determinar la meridiana, como se dijo ántes, el magnetómetro puede servir para trazarla, valiéndose del aparato adicional ya descrito. Para esto se dispone el instrumento sin la

caja de madera que ha servido para hacer las observaciones de oscilacion, se monta el telescopio, cuya línea de colimacion ha sido corregida, sobre sus montantes, en seguida se hace girar todo el instrumento hasta colocarlo en la direccion del sol y despues se mueve el espejo hasta conseguir que la imágen reflejada del astro, aparezca en el campo del anteojo. Acto continuo se mueven los tornillos de aproximacion del movimiento general y el del movimiento del espejo alrededor del eje horizontal, hasta obtener la coincidencia de uno de los limbos del sol con el hilo horizontal y que el vertical bisecte su imágen, anotándose en esta posicion la graduacion azimutal del instrumento.

Se tiene cuidado de estar moviendo azimutalmente el magnetómetro hasta que la imágen del sol vuelva á aparecer en el campo, y se toma la graduacion cuando esté en igualdad de circunstancias que en la primera observacion. La semi-diferencia de las dos lecturas dará la graduacion meridiana.

Las condiciones que debe satisfacer el aparato adicional del magnetómetro son:

1ª El eje del movimiento azimutal del espejo debe ser vertical y el del vertical perfectamente horizontal. Esta doble condicion se satisface valiéndose del nivel montante de que está provisto el aparato.

2ª La superficie reflejante del espejo debe ser paralela al eje horizontal. Para llenar esta condicion se mueve azimutalmente el círculo que lleva el espejo hasta que se vea por reflexion en el anteojo un punto bien definido que se pone en coincidencia con el centro de la retícula, en seguida se invierte el espejo haciendo que el muñon que estaba á la derecha quede á la izquierda, y recíprocamente, se mueve el espejo al rededor de su eje horizontal hasta conseguir que el punto aparezca en el campo del anteojo; despues con el tornillo de aproximacion se procura que quede en coincidencia con el centro de la retícula; si esto no se consigue, habrá que variar la posicion del espejo respecto del eje, por medio de un tornillo que lleva en su parte posterior, repitiendo la operacion hasta conseguir que en las dos posiciones del espejo el punto quede en coincidencia con el centro de la retícula.

3ª La línea de colimacion debe ser perpendicular á la superficie reflejante.

Esto se verifica suspendiendo una plomada á cierta distancia, de manera que el hilo que la suspende quede en coincidencia con el vertical de la retícula; despues se mueve el espejo al rededor de su eje horizontal, hasta conseguir que la imágen de aquel aparezca por reflexion en el campo del anteojo, y con el tornillo de aproximacion del movimiento azimutal del espejo se establece de nuevo la coincidencia con el hilo vertical de la retícula.

Una vez determinada la graduacion meridiana, se monta el instrumento como para observaciones de oscilacion; se quita la torsion al hilo, se suspende la aguja en un estribo que puede fijarse á la pieza metálica en que termina el hilo, tanto por su parte superior como por la inferior. Con esta disposicion se consigue hacer girar el iman 180° al rededor de su eje de figura, y por consiguiente eliminar el error que proviene de la falta de coincidencia entre este último, y el eje magnético de la barra. Se mueve azimutalmente el instrumento hasta conseguir que la línea central de la escala del iman coincida con el hilo vertical de la retícula; en esta posicion se hacen las lecturas de los verniers, se suspende el estribo por su apéndice inferior, y despues de ejecutar las mismas operaciones, se toma el promedio de las cuatro lecturas, que restado de la indicacion meridiana dará el valor de la declinacion.

TEODOLITO BRUNNER.

Este teodolito está destinado para el levantamiento de las cartas magnéticas, pues reune las condiciones necesarias para viaje y evita el uso de varios instrumentos, dando aproximadamente la posicion geográfica de la localidad, el tiempo, la declinacion, la inclinacion y la intensidad de la fuerza magnética.

El aparato se compone (Figura 22) de un eje vertical cónico unido á un disco graduado que le es perpendicular, y va unido á un tripié sostenido por tres tornillos niveladores. Al derredor de este eje gira con frotamiento suave un tubo tambien cónico, que lleva en su parte inferior un disco provisto de dos verniers dia-

metralmente opuestos. La parte superior del tubo cónico está terminada por una caja de forma rectangular, que tiene en las caras, anterior y posterior, unos tubos cerrados en sus extremidades por vidrios planos; en las caras laterales lleva dos círculos verticales: uno de ellos graduado y el otro con incisiones hechas en borde y separadas entre sí 90°. Por el centro del círculo graduado pasa un eje que sostiene en su extremidad un telescopio y unas alidadas que sirven para llevar los verniers. Cerca del objetivo del anteojo hay un brazo que en su extremidad libre soporta un microscopio cuyo eje óptico es paralelo al del telescopio; en el interior de este último hay un espejito plano que forma con su eje óptico un ángulo de 45° á fin de que la retícula quede iluminada al hacer observaciones nocturnas; su ocular es acodado, disposicion muy conveniente para la observacion de los astros cuando están cerca del zenit.

Por el centro del otro círculo pasa un eje terminado por una pinza que en una de sus extremidades lleva un trinquete y en la otra puede colocarse un cilindro de fierro dulce. El trinquete sirve para poner fácilmente el cilindro en dos posiciones verticales diametralmente opuestas y en dos horizontales que satisfagan la misma condicion.

La parte superior de la caja lleva un tubo de pequeña altura y de gran diámetro, encerrado por otro que en su superficie lateral tiene cuatro tornillos, y á su vez termina por un casquillo que gira á su derredor con frotamiento suave. Este casquillo, soporta un tornito donde se enrolla un hilo fino de seda que desciende hasta la caja, y sostiene un estribo que sirve para llevar la barra imantada.

De la parte superior de la caja párte igualmente una pieza metálica, que sirve para poner otra barra imantada en una posicion perpendicular al plano del círculo vertical. Ambos imanes son de forma prismática y llevan en sus extremidades unos disquitos de plata con una línea de referencia.

La retícula del microscopio es una escala grabada en vidrio de tal manera, que el valor angular de dos divisiones consecutivas sea igual á la aproximacion del instrumento.

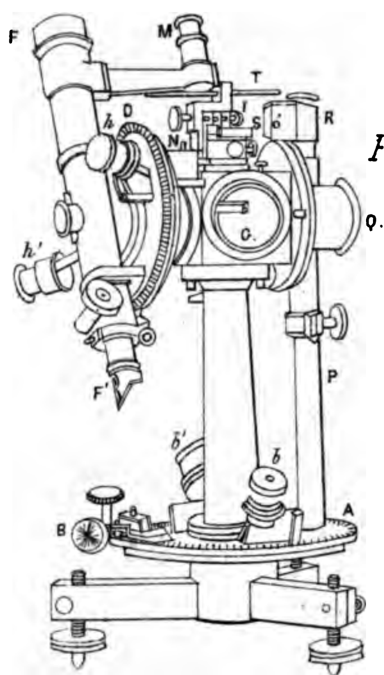


Fig 22.

Lit. del Timare



MANERA DE DETERMINAR LA DECLINACION VALIÉNDOSE DEL TEODOLITO BRUNNER.

La declinacion se obtiene del mismo modo que como se explicó al hablar del magnetómetro con la única diferencia que aquí es posible hacer desaparecer el error debido á la falta de coincidencia entre el hilo de seda que suspende el iman, y el eje vertical del instrumento, pues pueden visarse las dos extremidades de la barra y tomarse el promedio de las lecturas. Este error puede además reducirse cuanto se quiera, sirviéndose de los cuatro tornillos que se encuentran en el tubo ya descrito.

DETERMINACION DE LA INCLINACION.

La inclinacion no puede obtenerse directamente sirviéndose del teodolito Brunner; pero se recordará que al tratar de la descomposicion de la fuerza megnética llegamos á la fórmula

$$\text{tang}\, i = \frac{f_v}{f_h}$$

El valor de esta relacion se obtiene colocando verticalmente en la pinza la pieza cilíndrica de fierro; ésta adquirirá inmediatamente una masa magnética proporcional á f_v por efecto de induccion y obrando sobre la aguja suspendida la desviará del meridiano magnético un ángulo α.

En seguida se hará girar el cilindro de fierro 180°, se producirá una desviacion α' y se tomará por valor del ángulo de desviacion el promedio entre α y α'.

Colocando despues el cilindro horizontalmente y haciendo las

mismas operaciones antedichas, se obtendrán los valores a'' y a''' cuyo promedio dará el ángulo de desviacion correspondiente á la componente horizontal. Estos valores sustituidos en la fórmula

$$\tang i = D \frac{\text{sen } \frac{1}{2} (a + a')}{\tang \frac{1}{2} (a'' + a''')}$$

darán el valor de la tangente y por consiguiente del ángulo de inclinacion.

La fórmula anterior ha sido obtenida estableciendo las ecuaciones de equilibrio en las posiciones vertical y horizontal de la barra de fierro dulce, despejando de ellas á f_v y á f_h y dividiendo en seguida una por otra.

La constante D se determina prácticamente haciendo en la misma estacion, y al mismo tiempo observaciones de inclinacion con una brújula, y de desviacion con el teodolito Brunner. De esta manera quedan conocidas todas las cantidades que entran en la fórmula con excepcion de D.

Se comprende desde luego que el valor D no quedará bien determinado, sino tomando el promedio de una numerosa serie de observaciones.

MEDIDA DE LA INTENSIDAD.

Segun vimos al establecer las fórmulas que se usan en el magnetómetro para la determinacion de la componente horizontal, es necesario conocer el producto $2 \mu l f_h$ y el cociente $\frac{2 \mu l}{f_h}$.

El primero se obtiene practicando con el teodolito observaciones de oscilacion idénticas á las ya descritas. Para obtener el segundo se coloca la barra imantada que sirvió para las oscilaciones en el soporte que está en la parte superior de la caja, se monta la otra en el estribo, y se toma el ángulo de desviacion con cada una de las extremidades de la barra desviada, tanto cuando el polo

N. de la desviadora está hácia el E., como cuando queda al W. Sustituyendo el promedio de los valores obtenidos en la fórmula

$$\frac{2\,\mu\,l}{f_h} = \frac{\text{sen } \alpha}{E}$$

se tendrá la relacion buscada, que dividida por el producto

$$2\,\mu\,l\,f_h = \frac{\pi^2\,\zeta\,m\,r^2}{t^2}$$

dará

$$f_h^2 = \frac{E\,\pi^2\,\zeta\,m\,r^2}{t^2}.$$

Veamos la manera de obtener la expresion

$$\frac{2\,\mu\,l}{f_h} = \frac{\text{sen } \alpha}{E}.$$

Sea NS la meridiana magnética (Fig. 23), *ab* la aguja desviada, *a'b'* la desviadora. Por razones idénticas á las expuestas al desarrollar las fórmulas empleadas en el método que sirve para determinar la fuerza total, el sistema que obra sobre la aguja desviada es en nuestro caso el par terrestre (f_h —f_h), el par que proviene de las componentes horizontales de las fuerzas *ab'* y *a'b* y que resulta de las componentes de la misma especie de las *b'b* y *a'a*.

La intensidad de cada una de las fuerzas de estos pares, segun las leyes de las atracciones y repulsiones magnéticas, es:

$$\frac{\mu\,\mu'}{\overline{a\,b'}^2}\cos b'\,a\,b''$$

Como coseno $b'\,a\,b''$ es constante, lo mismo que la distancia entre los polos a y b', la expresion de la intensidad de las fuerzas quedará $\mu\,\mu'\,e$.

Estableciendo la ecuacion de equilibrio, tendrémos:

$$f_h \mu' \times b\,d = e\,\mu\,\mu' \times b''g + e\,\mu\,\mu' \times a''m,$$

por otra parte

$$b\,d = 2\,l' \text{ sen } a,$$

y

$$b''g = a''m = 2\,l \text{ sen } m\,b''\,a''.$$

Sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, resulta:

$$f_h\,\mu'\,l' \text{ sen } a = 2\,e\,\mu\,\mu'\,l \text{ sen } m\,b''\,a'',$$

de donde

$$\frac{2\,\mu\,l}{f_h} = \frac{l' \text{ sen } a}{e \text{ sen } m\,b''\,a''}$$

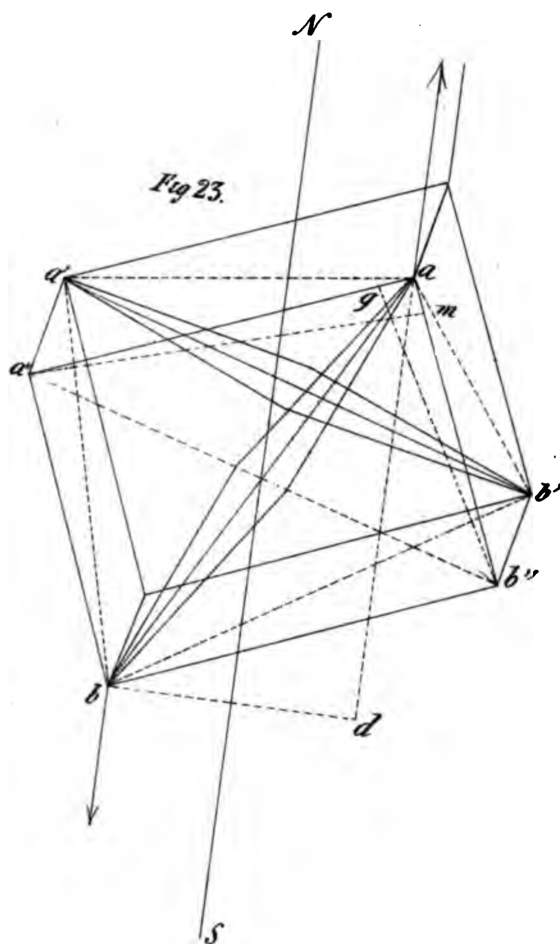
en la que siendo

$$\frac{l'}{e \text{ sen } m\,b''\,a''}$$

relacion entre cantidades constantes, se ha hecho igual al cociente $\frac{1}{E}$.

Para determinar prácticamente la constante E, se sigue el mismo procedimiento que indicamos para la determinacion de D, haciendo uso de un magnetómetro.

Lám. 1



LIT. DEL TIMBRE.


THE ASTOR LIBRARY
NY

DETERMINACION DE LA FUERZA TOTAL POR EL MÉTODO DE LLOYD.[1]

Al hablar de este procedimiento (Fig. 24), dimos á conocer las fórmulas que le eran aplicables. Vamos á exponer á continuacion el método práctico para determinar las variables que entran en ellas, y que nos ha sido suministrado por nuestro estimable amigo el Sr. Miguel Pérez, subdirector del Observatorio Meteorológico Central.

"La brújula de inclinacion lleva cuatro agujas. Las números 1 y 2 sirven para observar la inclinacion de la manera acostumbrada. La número 3 es tambien una aguja comun de inclinacion; la número 4 lleva un pequeño peso constante que obra en direccion opuesta á la del magnetismo terrestre. Esta aguja se puede fijar en el brazo que lleva los microscopios, cuando se usa como desviadora de la número 3.

"Las observaciones constan de dos partes: en la primera se observa la posicion de equilibrio de la aguja número 3, entre la accion del magnetismo terrestre y la de la número 4 usada como desviadora, cuyo polo N. se dirige alternativamente hácia el N. y S. magnéticos. En la segunda parte se observa la posicion de equilibrio de la número 4, entre la accion geomagnética y la del pequeño peso constante que lleva fijo.

"Las observaciones de inclinacion y de fuerza total se practican como sigue:

"1º Se coloca la aguja número 1 en las chapas de ágata, y se hace una observacion de inclinacion de la manera acostumbrada.

"2º Despues se coloca en lugar de la número 1 la número 3, y se fija la número 4 entre los microscopios, colocándola siempre

1 Los métodos descritos en las páginas 00 y 00 que sirven de fundamento á la determinacion de la fuerza total, que acabamos de describir, los hemos investigado directamente. Conociamos las instrucciones que el Sr. Pérez nos habia proporcionado, y sabiamos igualmente que el método es debido al Dr. Lloyd; pero ignoramos absolutamente cuáles son sus fórmulas y cómo las ha desarrollado. Con temor hemos emprendido esta investigacion, en la que sólo sabiamos los puntos finales á que debiamos llegar.

en la misma posicion; es decir, el extremo que lleva el pequeño contrapeso *debe ocupar siempre el mismo lugar.* Se observa entónces la inclinacion de la número 3 en una posicion de la aguja y del círculo. Se repite la observacion colocando el extremo N. de la aguja número 4 en direccion opuesta, por medio del movimiento del brazo de los microscopios; la semidiferencia de las lecturas en ambas posiciones, dará el valor u' del ángulo de desviacion.

"3º Se quita la aguja número 3 y se sustituye por la número 4; se observa su inclinacion η en cuatro posiciones de la aguja y del círculo. La desviacion de esta aguja de la posicion que debiera guardar, obedeciendo sólo á la accion geomagnética, es $u = \theta - \eta$; siendo el ángulo η positivo cuando se mide del mismo lado que la inclinacion θ, y negativo en caso contrario.

"4º Se repite la observacion segunda.

"5º Se hace una observacion completa con la aguja número 2.

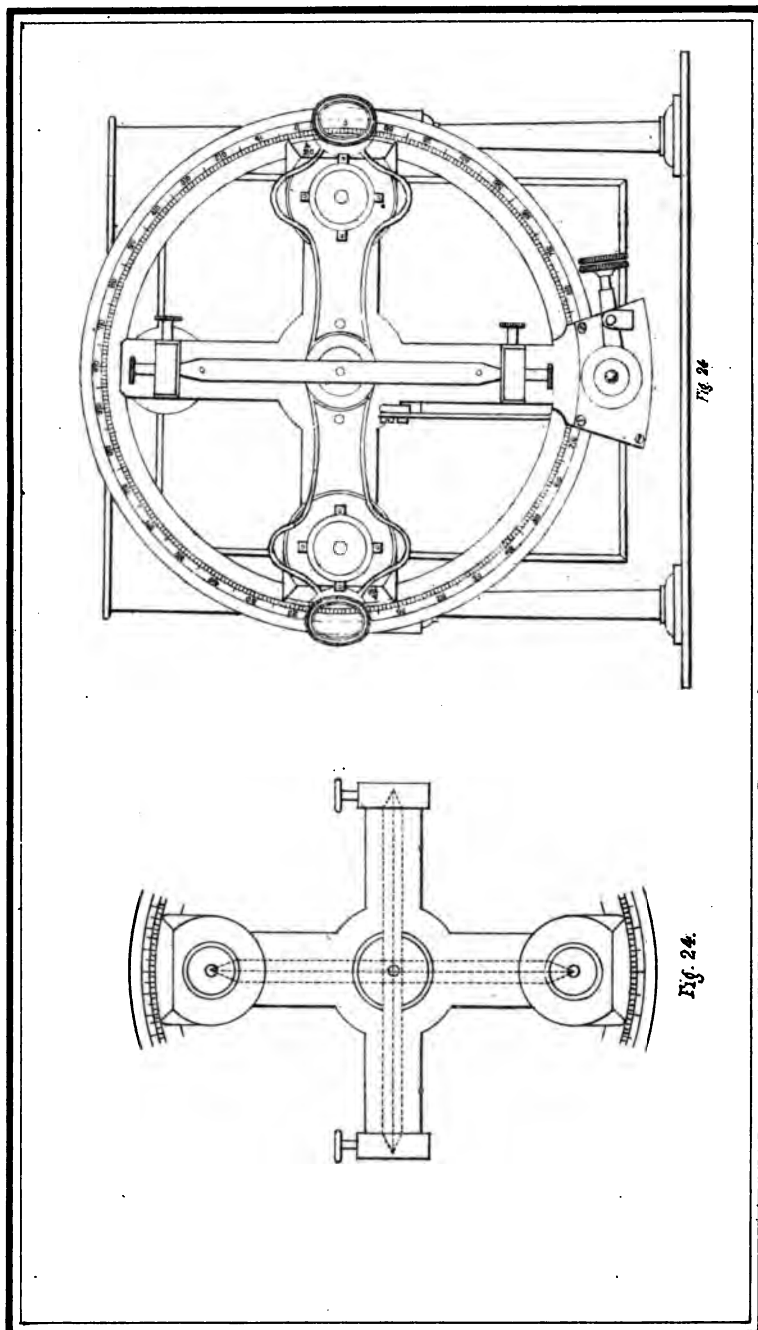
"En ningun caso y por ningun motivo deben invertirse ni alterarse los polos de las agujas números 3 y 4."

INSTRUMENTOS REGISTRADORES.

Para investigar las leyes que siguen los fenómenos meteorológicos y para establecer las que los ligan, es necesario observarlos de una manera continua, ó por lo ménos á intervalos muy cortos.

Los instrumentos que dan los valores absolutos de los elementos magnéticos, exigen operaciones muy laboriosas, que por lo mismo quitan mucho tiempo y fatigan demasiado al observador; por estas razones creemos que para el estudio de la correlacion de las fuerzas físicas, estos instrumentos son inútiles, si no van acompañados de otros que den las variaciones.

En el estudio de cualquier fenómeno no presenta tanto interes valuar su intensidad absoluta, cuanto ver los cambios que experimenta con la variacion del medio en que se opera. De lo anterior resulta la necesidad de hacer observaciones muy frecuentes y la utilidad de los instrumentos que dan solamente las variaciones, y que han sido descritos anteriormente; mas si se reflexiona



LIT. DEL TIMBRE.

un poco, estos aparatos tienen el inconveniente de tener que hacer directamente la observacion, y por lo mismo no poder sustraerse á los cambios de temperatura; pues aunque ésta podria llevarse en cuenta, los cálculos que habria que hacer para cada observacion, y más cuando son muy numerosas, harian el estudio demasiado penoso.

Además, no daria resultado poner los instrumentos en departamentos subterráneos, en los que no variase la temperatura de una manera sensible, pues con sólo la presencia del observador á intervalos muy cortos y la comunicacion que necesariamente tendria que establecerse con el exterior á cada observacion, haria cambiar la temperatura, y por consiguiente, las posiciones de equilibrio de las barras imantadas.

Para obviar estos inconvenientes se emplean los instrumentos registradores, que no son otra cosa que aparatos de variaciones á los que se añade un espejo sólidamente unido á las barras magnéticas y que necesariamente seguirá sus movimientos. Estos pueden quedar grabados, si hacemos que un haz luminoso de rayos paralelos sea reflejado por el espejo y obre químicamente sobre láminas de papel ó zinc impresionables y animadas de un movimiento cuya ley sea conocida. Así tendrémos una curva más ó ménos regular, cuyas abscisas y ordenadas respectivamente serán funciones del tiempo y del cambio de los elementos magnéticos. Llamamos la atencion sobre el empleo de las láminas de zinc en vez de las de papel, por tener aquellas la ventaja de que, preparadas convenientemente, sirven de planta para impresion.

Recomendamos al lector la obra de Gordon, sobre "Electricidad y Magnetismo," si desea profundizar el estudio de los instrumentos registradores.

ERRATAS MAS NOTABLES.

Págs.	Líneas.	DICE.	LÉASE.
19...	6......	F A F	T A F.
19...	6......	x A F	x A T.
19...	10......	T_h y T_v	F_h y F_v.
20...	19......	la fórmula (2) será	la fórmula (2) es.
22...	11......	Fig. 7 (bis)	Fig. 8ª
26...	17......	á la masa u	á la masa μ.
28...	17......	determinar á $2f_h$	determinar á f_h.
31...	16......	$m\int\int\int dx\,dy\,dz\,y^2$ (1) $m\int\int\int dx\,dy\,dz\,z^2$ (2)	$m\int\int\int dx\,dy\,dz\,y^2$ (1), $m\int\int\int dx\,dy\,dz\,z^2$ (2)
34...	6......	$2f_h$ sen a	f_h sen a.
34...	14......	y $\beta=\frac{d+l}{a\,a'}$	y $\cos\beta=\frac{d+l}{a\,a'}$.
34...	19......	las distancias	la distancia.
38...	6......	$2f_t\mu' l$ sen $(i\pm\gamma)$	$2f_t\mu' l'$ sen $(i\pm\gamma)$.
40...	4......	ya conocerémos	ya conocemos.
40...	11......	$\frac{f_t}{2\mu l}=\frac{1}{\text{sen}\,(i\pm\gamma)}(l^2+l'^2+d'^2)^{\frac{3}{2}}$	$\frac{f_t}{2\mu l}=\frac{1}{\text{sen}\,(i\pm\gamma)\,(l^2+l'^2+d'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Págs.	Líneas.	DICE.	LÉASE.
40...	15......	$\frac{f_t}{2\mu l}=\frac{1}{\operatorname{sen}(i\pm\gamma)(l^2+l'^2+d'^2)}\ \frac{3}{2}$	$\frac{f_t}{2\mu l}=\frac{1}{\operatorname{sen}(i\pm\gamma)(l^2+l'^2+d'^2)^{\frac{3}{2}}}$.
41...	4......	$\underline{4\mu l^2}=\overline{\mathrm{P}\,d\cos\beta}\ \frac{\operatorname{sen}(i\pm\gamma)\operatorname{sen}(i\pm\beta)\ \mathrm{R}}{\operatorname{sen} i\pm\beta}$	$4\mu^2 l^2=\frac{\mathrm{P}\,d\cos\beta\operatorname{sen}(i\pm\gamma)\ \mathrm{R}}{\operatorname{sen} i\pm\beta}$.
52...	Nota...	$\cos a=0$ y $\operatorname{tang} i'=a$	$\cos a=0$ y $\operatorname{tang} i'=\infty$.
60...	20......	reemplazar por la (1)...	reemplazar por la unidad.
67...	28......	pintados exteriormente	pintados interiormente.
78...	16......	$\operatorname{sen}\delta+\operatorname{sen}\delta=b$	$\operatorname{sen}\delta+\operatorname{sen}\delta'=b$.
81...	21......	y da un *hop*	y da un *up*.
82...	4......	el tiempo	determinará el tiempo.
83...	25......	$t=\pi\sqrt{\frac{\Sigma r^2 m}{2\mu l f_h}}\left(1+\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{2'}{2}\theta\right)$	$t=\pi\sqrt{\frac{\Sigma m r^2}{2\mu l f_h}}\ (1+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta)$.
83...	28......	$t_1=t_2\left(1+\frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{2'}{2}\theta\right)$	$l_1=t_2(1+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta)$.
83...	31......	θ y $\frac{t}{2}$	θ y t_2.
97...	Nota...	En las páginás 00 y 00	En las páginas 22 y 37.

INDICE.

CAPÍTULO I.

CAPÍTULO II.

CAPÍTULO III.

CAPÍTULO IV.

CAPÍTULO V.

CAPÍTULO VI.

CAPITULO VII.
